TÀI LIỆU ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ I
MÔN TOÁN LỚP 10
Bộ: CÁNH DIỀU

Chương I: Mệnh đề toán học. Tập hợp

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

1. Mệnh đề toán học

- Mệnh đề toán học là một câu khẳng định về một sự kiện trong toán học.
- Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng vừa sai.

2. Mệnh đề chứa biến

- Mệnh đề chứa biến là một khẳng định chứa một hoặc nhiều biến thay đổi.
- Tính đúng sai của mệnh đề phụ thuộc vào giá trị cụ thể của các biến.
- Mệnh đề chứa biến là mệnh đề nếu ta cho các biến đó những giá trị nhất định.

3. Mệnh đề phủ định

- Phủ định của mệnh đề P là mệnh đề $\overline{P}$: "Không phải P".
- P đúng thì $\overline{P}$ sai.
- P sai thì $\overline{P}$ đúng.

4. Mệnh đề kéo theo

- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu P thì Q" là mệnh đề kéo theo.
- $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.
- Các định lí toán học thường là những mệnh đề đúng và thường được phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$, khi đó:
  + P là giả thiết của định lí;
  + Q là kết luận của định lí.
- Với mệnh đề $P \Rightarrow Q$ thì:

+ P là điều kiện đủ để có Q;
+ Q là điều kiện cần để có P.

5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

- $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.
- Nếu $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì P và Q là hai mệnh đề tương đương, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

6. Kí hiệu $\forall, \exists$

- Mệnh đề $\forall x \in X, P(x)$: "Với mọi $x \in X$ thì $P(x)$ đúng".
- Mệnh đề $\exists x \in X, P(x)$: "Tồn tại $x \in X$ để $P(x)$ đúng".
- $A = \forall x \in X, P(x) \Rightarrow \overline{A} = \exists x \in X, \overline{P(x)}$.
- $A = \exists x \in X, P(x) \Rightarrow \overline{A} = \forall x \in X, \overline{P(x)}$.

II. TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. Tập hợp

- Các đối tượng có chung một hay nhiều tính chất quy tụ lại thành một tập hợp, mỗi đối tượng là một phần tử.
- Mỗi tập hợp được xác định bởi:
  + Cách liệt kê: $A = \{a_1; a_2; a_3; ...\}$;
  + Cách nêu tính chất đặc trưng: $A = \{x \in X | P(x)\}$.
- Tập hợp rỗng $\varnothing$ là tập hợp không có phần tử nào.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

2. Tập hợp con và tập hợp bằng nhau

- Tập con: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- Tập $\varnothing$ là tập con của mọi tập hợp.
- Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

III. GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

- Giao hai tập hợp: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.

IV. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

- Hợp hai tập hợp: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

V. PHẦN BÙ. HIỆU CỦA HAI TẬP HỢP

- Phần bù của tập hợp: $C_A B = A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ với $B \subset A$.

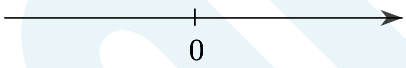
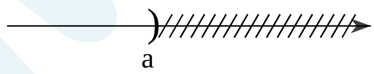
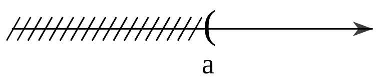
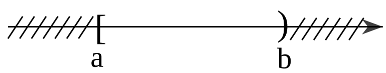
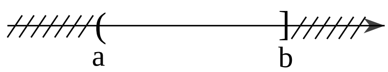
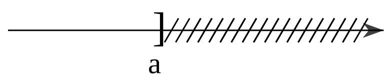
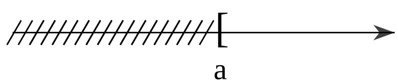
- Hiệu hai tập hợp: $A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$

VI. CÁC TẬP HỢP SỐ

1. Các tập hợp đã học

Quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tập hợp	Tên gọi, kí hiệu	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
$\mathbb{R}$	Tập số thực $(-\infty;+\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \| a \le x \le b\}$	Đoạn $[a;b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \| a < x < b\}$	Khoảng $(a;b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \| x < a\}$	Khoảng $(-\infty;a)$	
$\{x \in \mathbb{R} \| x > a\}$	Khoảng $(a;+\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \| a \le x < b\}$	Nửa khoảng $[a;b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \| a < x \le b\}$	Nửa khoảng $(a;b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \| x \le a\}$	Nửa khoảng $(-\infty;a]$	
$\{x \in \mathbb{R} \| x \ge a\}$	Nửa khoảng $[a;+\infty)$	

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định mệnh đề, tính đúng/sai của mệnh đề

Phương pháp giải:

+ Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc sai.

+ Mệnh đề: xác định giá trị (Đ) hoặc (S) của mệnh đề đó.

+ Mệnh đề chứa biến $P(x)$: Tìm tập hợp D của các biến x để $P(x)$ (Đ) hoặc (S).

+ Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ sai khi P đúng và ngược lại.

+ Mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai

+ Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Hay khi P và Q đều đúng hoặc P và Q đều sai.

Ví dụ 1 Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

a. 4 là số chính phương.
b. Trời lạnh.
c. Phương trình $x^2 - 1 = 0$ vô nghiệm.
d. Hàm số $y = 2x$ luôn đi qua gốc tọa độ.
e. Bữa trưa hôm nay thật tuyệt!
f. Còn bao nhiêu phút nữa thì tới nơi?
g. Malaysia là nước duy nhất có hai thủ đô.
h. Có vô số đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt.
i. Everest là đỉnh núi cao nhất thế giới.
k. Bạn cắm được lọ hoa đẹp quá!

Phân tích: Các câu cảm thán, câu hỏi, câu không xác định được tính đúng/sai không là mệnh đề. Các câu khẳng định đúng hoặc sai về toán học là mệnh đề toán học.

Lời giải:

Các câu là mệnh đề toán học là: a, c, d, h.

Ví dụ 2 Xác định tính đúng/sai của các mệnh đề sau:

a. $2k\left(k \in \mathbb{N}\right)$ là số chẵn.

b. Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì chia hết cho cả 3 và 5.

c. $\forall x \in \mathbb{N}: x^3 > 0$

d. $\exists x, y > 0: \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

e. Tứ giác nội tiếp trong đường tròn khi và chỉ khi có 2 góc đối bù nhau.

f. Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
g. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
h. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.
i. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.
Phân tích: Để xác định một mệnh đề là sai, học sinh cần chỉ ra 1 trường hợp sai của mệnh đề.

Lời giải:

Mệnh đề	Tính đúng/sai
a. $2k\left(k \in \mathbb{N}\right)$ là số chẵn.	Đúng
b. Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì chia hết cho cả 3 và 5.	Đúng
c. $\forall x \in \mathbb{N}: x^3 > 0$	Sai vì với $x = 0$ thì $x^3 = 0$
d. $\exists x, y > 0: \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$	Đúng vì theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}} = 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x = y = 1$
e. Tứ giác nội tiếp trong đường tròn khi và chỉ khi có 2 góc đối bù nhau.	Đúng
f. Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.	Sai vì với $1+3=4$ là số chẵn nhưng $1,3$ là số lẻ.
g. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.	Sai vì $2.3=6$ là số chẵn nhưng 3 là số lẻ.
h. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.	Sai vì $1+3=4$ là số chẵn nhưng $1,3$ là số lẻ.
i. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.	Đúng

Ví dụ 3 Xét các phát biểu sau:

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 2.$
$\pi > 3,12.$
$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0.$
$\exists x, y \in \mathbb{R}: x^y = 5.$
Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 2$ sai vì $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

$\pi > 3,12$ đúng vì $\pi \approx 3,14$.

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ đúng.

$\exists x, y \in \mathbb{R}: x^y = 5$ đúng vì với $x = \sqrt{5}; y = 2$ thì $x^y = 5$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 4 Cho mệnh đề: "Nếu x chia hết cho 4 và 6 thì x chia hết cho 12". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Điều kiện đủ để x chia hết cho 12 là x chia hết cho 4 và 6.

B. Điều kiện cần để x chia hết cho 12 là x chia hết cho 4 và 6.

C. x chia hết cho 12 suy ra x không chia hết cho 4 và 6.

D. x chia hết cho 4 suy ra x chia hết cho 12.

Lời giải:

Mệnh đề đúng là: Điều kiện đủ để x chia hết cho 12 là x chia hết cho 4 và 6.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 5 Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x + 15 \leq x^2"$ với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P(0)$. **B.** $P(3)$. **C.** $P(4)$. **D.** $P(5)$.

Lời giải:

Ta có:

+, $P(0): "15 \leq 0$ là mệnh đề sai.

+, $P(3): "18 \leq 9$ là mệnh đề sai.

+, $P(4): "19 \leq 16$ là mệnh đề sai.

+, $P(5): "20 \leq 25$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 6 Mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $ABCD$ có ba góc vuông.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $ABCD$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi $ABCD$ có bốn góc vuông.

Lời giải:

"Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi $ABCD$ có bốn góc vuông" là một mệnh đề tương đương sai vì hình chữ nhật vẫn có bốn góc vuông nhưng không phải là hình vuông.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 7 Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có **mệnh đề đảo** là **sai?**

A. Tam giác cân có hai cạnh bằng nhau.

B. x chia hết cho 6 thì x chia hết cho 2 và 3.

C. $ABCD$ là hình bình hành thì AB song song với CD.

D. $ABCD$ là hình chữ nhật thì $A = B = C = 90°$.

Lời giải:

Mệnh đề	Mệnh đề đảo
Tam giác cân có hai cạnh bằng nhau.	Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân. (Đ)
x chia hết cho 6 thì x chia hết cho 2 và 3.	x chia hết cho 2 và 3 thì x chia hết cho 6. (Đ)
$ABCD$ là hình bình hành thì AB song song với CD.	AB song song với CD thì $ABCD$ là hình bình hành. (S)
$ABCD$ là hình chữ nhật thì $A = B = C = 90°$.	$A = B = C = 90°$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật

Chọn đáp án C.

Ví dụ 8 Mệnh đề $"\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3"$ khẳng định rằng:

A. Bình phương của mỗi số thực bằng 3.

B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.

C. Chỉ có một số thực có bình phương bằng 3.

D. Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

Lời giải:

Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.

Chọn đáp án B.

Dạng 2. Xác định/phát biểu mệnh đề: phủ định, kéo theo, tương đương,…

Phương pháp giải:

1. Mệnh đề phủ định

Mệnh đề phủ định của P là "Không phải P".

Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in X, P(x)$" là: "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$"

Mệnh đề phủ định của "$\exists x \in X, P(x)$" là: "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

2. Mệnh đề kéo theo

Mệnh đề: $P \Rightarrow Q$. Khi đó: P là giả thiết, Q là kết luận.

Hoặc P là điều kiện đủ để có Q, hoặc Q là điều kiện cần để có P.

3. Mệnh đề đảo

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

4. Mệnh đề tương đương

Mệnh đề: $P \Leftrightarrow Q$. Khi đó: P tương đương với Q.

Hoặc P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc P khi và chỉ khi Q.

Ví dụ 1 Cho mệnh đề "Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm". Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là mệnh đề nào sau đây?

A. Phương trình $x^2 - 4x + 4 \neq 0$ có nghiệm.
B. Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có vô số nghiệm.
C. Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
D. Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ vô nghiệm.

Phân tích: Phủ định của "có" là "không có".

Lời giải:

Mệnh đề phủ định "Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ không có nghiệm" hay "Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ vô nghiệm".

Chọn đáp án D.

Ví dụ 2 Cho mệnh đề: "Nếu 2 góc ở vị trí so le trong thì hai góc đó bằng nhau". Trong các mệnh đề sau đây, đâu là mệnh đề đảo của mệnh đề trên?

A. Nếu 2 góc bằng nhau thì hai góc đó ở vị trí so le trong.

B. Nếu 2 góc không ở vị trí so le trong thì hai góc đó không bằng nhau.
C. Nếu 2 góc không bằng nhau thì hai góc đó không ở vị trí so le trong.
D. Nếu 2 góc ở vị trí so le trong thì hai góc đó không bằng nhau.
Phân tích: Mệnh đề đã cho là mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$. Xác định đâu là mệnh đề P, đâu là mệnh đề Q. Từ đó suy ra mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$.

Lời giải:

Mệnh đề đảo là: Nếu 2 góc bằng nhau thì hai góc đó ở vị trí so le trong.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 3 Phủ định của mệnh đề $"\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1"$ là

A. $"\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2"$. **B.** $"\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1"$.

C. $"\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1"$. **D.** $"\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \geq 1"$.

Phân tích: Phủ định của $\exists$ là $\forall$. Phủ định của $=$ là $\neq$.
Lời giải:

Phủ định của mệnh đề là: $"\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1"$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 4 Cho hai mệnh đề sau:

P: “Hai tam giác bằng nhau”.

Q: “Ham tam giác đồng dạng”.

Phát biểu nào sau đây là mệnh đề tương đương?

A. Nếu hai tam giác bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.
B. Điều kiện cần để hai tam giác bằng nhau là hai tam giác đó đồng dạng.
C. Điều kiện đủ để hai tam giác đồng dạng là hai tam giác đó bằng nhau.
D. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để hai tam giác đó đồng dạng.
Lời giải:

Mệnh đề tương đương là: Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để hai tam giác đó đồng dạng.

Chọn đáp án D.

Dạng 3. Xác định tập hợp, tập hợp con. Phần tử của tập hợp

Phương pháp giải:

1. Tập hợp

- Liệt kê các phần tử của nó.

- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

2. Tập hợp con

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$.

$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x: x \in A \Rightarrow x \notin B$.

Số tập hợp con của tập hợp gồm n phần tử là 2^n.

Ví dụ 1 Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a. Tập A gồm các số tự nhiên chia hết cho 3 và nhỏ hơn 25.

b. $B = \{n \in \mathbb{N} | (n-1)(n+2) \le 15\}$

c. $C = \{x \in \mathbb{Z} | (x+1)(3x^2 - 10x + 3) = 0\}$

d. $D = \{2k+1 | k \in \mathbb{Z}, |k| \le 2\}$

Lời giải:

a. Cách 1: $A = \{0;3;6;9;12;15;18;21;24\}$.

Cách 2: Tập hợp A gồm các số tự nhiên là bội của 3 và nhỏ hơn 25.

b. Ta có: $(n-1)(n+2) \le 15 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{0;1;2;3\}$.

Vậy $B = \{0;1;2;3\}$.

c. Ta có: $(x+1)(3x^2 - 10x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $C = \{-1;3\}$.

d. Ta có: $k \in \mathbb{Z}, |k| \le 2 \Rightarrow k \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy $D = \{-3;-1;1;3;5\}$.

Ví dụ 2 Cho tập hợp $A=\{-2;1;6;13;...\}$. Hãy viết tập *A* dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của tập hợp.

Lời giải:

Ta có: $A=\left\{n^2-3\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$ hoặc $A=\left\{n^2+2n-2\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

Ví dụ 3 Cho các tập hợp $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\le 3\right\}$ Hãy viết lại các tập hợp B dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

A. $B=(-3;3]$. **B.** $B=[-3;3)$. **C.** $B=(-\infty;3]$. **D.** $B=[-3;3]$.

Lời giải:

Ta có: $|x|\le 3\Leftrightarrow -3\le x\le 3\Rightarrow B=[-3;3]$

Chọn đáp án D.

Ví dụ 4 Cho tập $X=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,(x^2-9).\left[x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right]=0\right\}$. Hỏi tập X có bao nhiêu phần tử?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Phân tích: Để xác định số phần tử của tập hợp, học sinh cần giải phương trình tích, xác định nghiệm của phương trình thỏa mãn $x\in\mathbb{Z}$. Từ đó, xác định số phần tử của tập hợp X.

Lời giải:

Ta có: $(x^2-9).\left[x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-9=0\\x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 3\\x=1\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow X=\{-3;1;3\}$. Vậy tập hợp X có 3 phần tử.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 5 Trong các tập hợp sau, tập nào có đúng hai tập hợp con ?

A. $\{x;y\}$. **B.** $\{x\}$. **C.** $\{x;y;z\}$. **D.** $\{a;x;y\}$.

Phân tích: Áp dụng công thức tính số tập hợp con của tập hợp có n phần tử là 2^n. Từ yêu cầu bài toán tìm n hoặc từ các tập hợp đã cho tìm số tập hợp con của mỗi tập hợp.

Lời giải:

Để tập hợp cần tìm có hai tập hợp con thì $2^n=2\Leftrightarrow n=1$. Vậy tập hợp cần tìm chỉ có 1 phần tử.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 6 Cho hai tập hợp $A=\{1;2;3\}$ và $B=\{1;2;3;4;5\}$. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải:

Vì $A\subset X$ nên X chắc chắn có các phần tử $\{1;2;3\}$.

Vì $X \subset B$ nên X có thể có các phần tử $\{4;5\}$.

Vậy X có thể là các tập hợp sau: $\{1;2;3\};\{1;2;3;4\};\{1;2;3;5\};\{1;2;3;4;5\}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 7 Cho các tập hợp sau:

$M = \{x \in \mathbb{N} | x$ là bội số của $2\}$.

$N = \{x \in \mathbb{N} | x$ là bội số của $6\}$.

$P = \{x \in \mathbb{N} | x$ là ước số của $2\}$.

$Q = \{x \in \mathbb{N} | x$ là ước số của $6\}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M \subset N$. **B.** $N \subset M$. **C.** $P = Q$. **D.** $Q \subset P$.

Phân tích: Liệt kê các phần tử của tập hợp. Từ đó xác định mối liên hệ giữa các tập hợp.

Lời giải:

Ta có:

$M = \{2;4;6;8;10;...\}$

$N = \{6;12;18;24...\}$

$P = \{1;2\}$

$Q = \{1;2;3;6\}$

$\Rightarrow N \subset M; P \subset Q$.

Chọn đáp án B.

Dạng 4. Các phép toán trên tập hợp

Phương pháp giải:

1. Đối với các tập hợp có phần tử liên tục, để thực hiện các phép toán trên tập hợp ta làm như sau:

Bước 1: Viết các tập hợp dưới dạng khoảng/đoạn/nửa khoảng.

Bước 2: Vẽ các trục số thể hiện các tập hợp (chú ý các vị trí số giống nhau phải thẳng hàng nhau)

Bước 3:

- Tìm giao: lấy các phần không bị gạch bỏ ở tất cả các trục số.
- Tìm hợp: lấy các phần mà nó không bị gạch bỏ ở ít nhất một trục số.
- Tìm hiệu $A \setminus B$: lấy phần ở tập A và gạch bỏ các phần của tập B.
- Tìm phần bù $C_A B$: lấy phần ở tập A và gạch bỏ các phần của tập B.

Bước 4: Dựa vào hình vẽ để kết luận.

2. Đối với bài toán tìm tham số để thỏa mãn kết quả của phép toán trên tập hợp, ta cũng tiến hành vẽ trục số và suy luận dựa trên hình ảnh.

Ví dụ 1 Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \le 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 \le x \le 4\}$

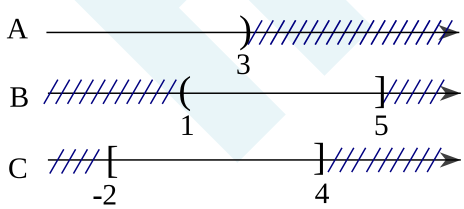
Tìm $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$ và $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$.

Phân tích: Các tập hợp đã cho có các phần tử liên tục nên bước đầu tiên ta cần viết lại các phần tử ở dạng đoạn/khoảng/nửa khoảng sau đó biểu diễn thành các trục số, xác định phép toán tập hợp cần thực hiện để thực hiện gạch bỏ các phần không thỏa mãn và cuối cùng là kết luận.

Lời giải:

Ta có $A = (-\infty; 3)$, $B = (1; 5]$, $C = [-2; 4]$.

Biểu diễn các tập hợp trên trục số như sau:



+ Tìm $A \cup B$: bỏ đi phần cùng bị gạch ở cả A và B, tức là bỏ đi phần lớn hơn số 5. Vậy phần còn lại từ $-\infty$ cho đến hết số 5 là hợp của A và $B \Rightarrow A \cup B = (-\infty; 5]$.

+ Tìm $A \cap B$: bỏ đi các phần bị gạch ở A và các phần bị gạch ở B, tức là bỏ đi phần từ $-\infty$ cho đến hết số 1 và phần từ số 3 đến $+\infty$. Vậy phần còn lại từ lớn hơn số 1 đến nhỏ hơn số 3 là giao của A và $B \Rightarrow A \cap B = (1;3)$

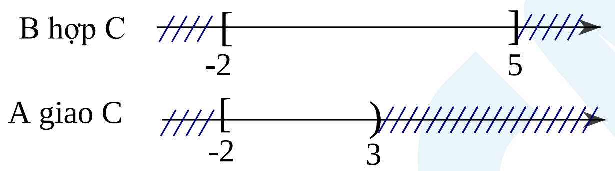
+ Tìm $A \setminus B$: phần nào của B thì gạch bỏ trên A, tức là bỏ đi phần từ sau số 1 đến hết số 5. Vậy phần còn lại trên A từ $-\infty$ đến hết số 1 là hiệu của A và $B \Rightarrow A \setminus B = (-\infty;1]$

+ Tìm $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$:

Bước 1: Tìm $B \cup C$: bỏ đi phần cùng bị gạch ở cả B và C, tức là bỏ đi phần từ $-\infty$ đến trước số -2 và phần từ sau số 5 đến $+\infty$. Vậy phần còn lại từ số -2 đến hết số 5 là hợp của B và C.

Bước 2: Tìm $A \cap C$: bỏ đi các phần bị gạch ở A và các phần bị gạch ở C, tức là bỏ đi phần từ $-\infty$ đến trước số -2 và phần từ số 3 đến $+\infty$. Vậy phần còn lại từ số -2 đến trước số 3 là giao của A và C.

Bước 3: Vẽ các trục số biểu diễn $B \cup C = [-2;5]$ và $A \cap C = [-2;3)$



Bước 4: Tìm $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$: phần nào của $A \cap C$ thì gạch bỏ trên $B \cup C$, tức là bỏ từ số -2 đến trước số 3. Vậy phần còn lại từ số 3 đến hết số 5 là hiệu của $B \cup C$ và $A \cap C$

$\Rightarrow (B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3;5]$

Chú ý: Khi làm bài các em không cần diễn giải như trên, chỉ cần viết tập hợp, vẽ trục số và kết luận. Đặc biệt cần chú ý về kí hiệu ngoặc nhọn (không lấy giá trị) và ngoặc vuông (lấy giá trị).

Ví dụ 2 Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 \geq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | 5 - x \geq 0\}$. Số các số nguyên thuộc cả hai tập A và B là.

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải:

Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 \geq 0\} \Rightarrow A = [-2;+\infty)$

$B = \{x \in \mathbb{R} | 5 - x \geq 0\} \Rightarrow B = (-\infty;5]$.

$\Rightarrow A \cap B = [-2;5]$. Vậy có 8 số nguyên thuộc cả hai tập A và B.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 3 Cho các tập hợp $A=(-\infty;m)$ và $B=[3m-1;3m+3]$. Tìm m để:

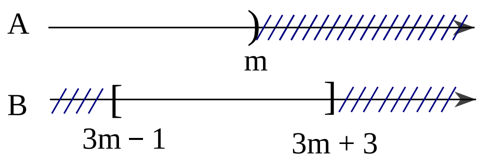
a) $B\subset A$

b) $C_{\mathbb{R}}A\cap B\neq\varnothing$

Phân tích: Bước đầu tiên ta cần vẽ hình biểu diễn của A và B lên trục số. Do m là số chưa biết nên chỉ cần chọn 1 điểm bất kì để thử vẽ, nếu thấy không hợp lý có thể vẽ lại (di chuyển các điểm chứa tham số sang bên trái hoặc sang bên phải các vị trí số khác) hoặc nhìn từ hình vẽ ban đầu để suy luận.

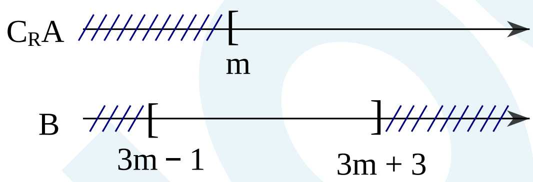
Lời giải:

a) Ta có thể vẽ trục số như sau:



Theo hình vẽ trên ta thấy để $B\subset A$ thì $3m+3<m\Leftrightarrow m<-\frac{3}{2}$ ($3m+3$ không thể bằng m do $m\notin A$)

b) Ta có: $C_{\mathbb{R}}A=[m;+\infty)$. Ta có thể vẽ trục số như sau:



Từ hình vẽ ta thấy để $C_{\mathbb{R}}A\cap B\neq\varnothing$ thì $m\leq 3m+3\Leftrightarrow m\geq-\frac{3}{2}$ (nếu $m>3m+3$ thì $C_{\mathbb{R}}A\cap B=\varnothing$).

Dạng 5. Bài toán thực tế

Phương pháp giải:

Bước 1: Chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp.

Bước 2: Sử dụng sơ đồ Ven để minh họa các tập hợp.

Bước 3: Dựa vào sơ đồ Ven ta thiết lập được đẳng thức hoặc phương trình, hệ phương trình, từ đó tìm được kết quả bài toán.

Ví dụ 1 Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn xếp học lực giỏi, 20 bạn xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa có hạnh kiểm tốt, vừa có lực học giỏi. Hỏi:

a. Lớp 10 A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt?

b. Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

Phân tích: Gọi A là tập hợp các học sinh xếp học lực giỏi, B là tập hợp các học sinh xếp loại hành kiểm tốt thì $A \cap B$ là tập hợp các học sinh vừa có hạnh kiểm tốt, vừa có học lực giỏi.

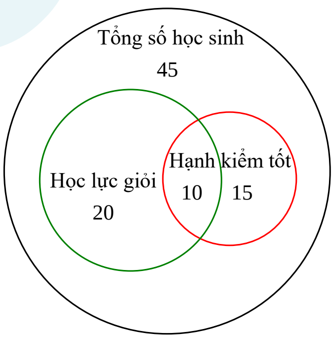
Biểu diễn các tập hợp thông qua sơ đồ Ven. Từ đó, trả lời các yêu cầu của bài toán.

a. Số học sinh được khen thưởng bằng tổng số học sinh chỉ có học lực giỏi, số học sinh chỉ có hạnh kiểm tốt và số học sinh có học lực giỏi và hạnh kiểm tốt.

b. Số học sinh chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt bằng tổng số học sinh trừ đi số học sinh có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt.

Lời giải:

Ta có sơ đồ Ven như hình vẽ phía dưới:



a. Số học sinh lớp 10A có xếp loại học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là:

$$15+20-10=25 \text{ (học sinh)}$$

Vậy có 25 học sinh được khen thưởng.

b. **Cách 1.** Số học sinh chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt là:

$$45-25=20 \text{ (học sinh)}$$

Cách 2. Số học sinh có xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt là:

$$20-10=10 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh có xếp loại học hạnh kiểm tốt và không xếp loại học lực giỏi là:

$$15-10=5 \text{ (học sinh)}$$

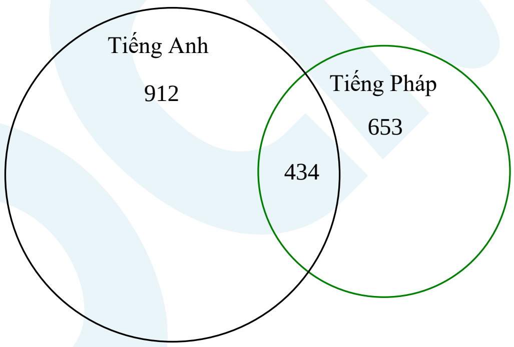
Số học sinh chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt là:

$$45-10-10-5=20 \text{ (học sinh)}$$

Vậy có 20 học sinh chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt.

Ví dụ 2 Trong một cuộc hội nghị khách hàng của công ty K, số khách hàng có thể nói được tiếng Anh là 912 người, có thể nói được tiếng Pháp 653 người; số khách hàng nói được cả hai ngoại ngữ tiếng Anh và Pháp là 434 người; không có ai nói ba ngoại ngữ trở lên. Hỏi có bao nhiêu người dự hội nghị?

Lời giải:



Dựa vào sơ đồ trên, số người dự hội nghị là

$$912+653-434=1131 \text{ (người)}$$

Vậy có 1131 người tham gia hội nghị.

Chương II: Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax+by<c,\ ax+by>c,\ ax+by\geq c,\ ax+by\leq c,$$

trong đó a,b,c là những số thực cho trước với a,b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn.

- Mỗi cặp số $(x_0;y_0)$ sao cho $ax_0+by_0<c$ là một nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$.
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của một bất phương trình được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Cách biểu diễn miền nghiệm của $ax+by+c<0$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ (*)

Bước 1: Vẽ đường thẳng $(d): ax+by+c=0$ trên mặt phẳng tọa độ.

Bước 2: Lấy điểm $M(x_0;y_0)\notin d$

+ $ax_0+by_0+c<0\Rightarrow$ nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của (*).

+ $ax_0+by_0+c>0\Rightarrow$ nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của (*).

Chú ý: Đối với bất phương trình $ax+by+c\leq 0$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ thì cách xác định miền nghiệm cũng tương tự, nhưng miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

II. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

+ Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

+ Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định bất phương trình/hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp giải:

+ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn là bất phương trình biến đổi về được một trong các dạng

$$ax+by<c,\ ax+by>c,\ ax+by\ge c,\ ax+by\le c$$

trong đó a và b là hai số không đồng thời bằng 0.

+ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn bao gồm các bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Chú ý: Tổng số ẩn của các bất phương trình trong hệ không vượt quá 2.

Ví dụ 1 Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $x^2+y<1$. **B.** $x+y+z\le 1$. **C.** $12x-y-1\ge 0$. **D.** $xy<4$.

Lời giải:

Ta có:

+) $x^2+y<1$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì bậc của x là 2.

+) $x+y+z\le 1$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có 3 ẩn là $x,\ y,\ z$.

+) $xy<4$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì không có dạng $ax+by<c$.

+) $12x-y-1\ge 0 \Leftrightarrow 12x-y>1$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 2 Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $\begin{cases} 2x+y<1 \\ x^2-y<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x+y+3z\le 1 \\ z\ge 1 \end{cases}$.

<u>C</u>. $\begin{cases} 12x-y-1\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y>x^2-y^2 \end{cases}$.

Lời giải:

Ta có:

+) $\begin{cases} 2x+y<1 \\ x^2-y<0 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x^2-y<0$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

+) $\begin{cases} x+y+3z\le 1 \\ z\ge 1 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x+y+3z\le 1$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

+) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y>x^2-y^2 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x-y>x^2-y^2$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

+) $\begin{cases} 12x-y-1\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn đáp án C.

Dạng 2. Kiểm tra nghiệm của bất phương trình/ hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp giải:

Thay giá trị của x_0, y_0 vào bất phương trình/hệ bất phương trình, nếu thu được bất phương trình/hệ bất phương trình đúng (gọi là *nghiệm đúng*) thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm của bất phương trình/hệ bất phương trình.

Ví dụ 1 Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $5x-2y>9$?

A. $(2;0)$. **<u>B</u>.** $(1;-2)$. **C.** $(0;-6)$. **D.** $(4;-3)$.

Lời giải:

Thay các cặp số vào bất phương trình ta được:

+) $5.1-2.(-2)>9 \Leftrightarrow 9>9$ sai nên $(1;-2)$ không phải là nghiệm của $5x-2y>9$.

+) $5.2-2.0>9;\ \ 5.0-2.(-6)>9;\ \ 5.4-2.(-3)>9$ đúng nên $(2;0)$, $(0;-6)$, $(4;-3)$ là các nghiệm của $5x-2y>9$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 2 Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y-5x>7 \\ 3x-2y\le 0 \end{cases}$?

A. $(7;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(-3;-3)$.

Lời giải:

Thay các cặp số vào hệ bất phương trình ta được:

+) $\begin{cases} -3-5.(-3)>7 \\ 3.(-3)-2.(-3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12>7 \\ -3\le 0 \end{cases}$ đúng nên $(-3;-3)$ là nghiệm của $\begin{cases} y-5x>7 \\ 3x-2y\le 0 \end{cases}$.

+) Thay $(7;0)$, $(2;3)$, $(0;0)$ vào hệ bất phương trình ta thấy không thỏa mãn hệ bất phương trình nên các cặp số này không phải là nghiệm của $\begin{cases} y-5x>7 \\ 3x-2y\le 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án D.

Dạng 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp giải:

+ Đối với bất phương trình:

Xét bất phương trình $ax+by\le c$ (1)

Trong đó a và b là hai số không đồng thời bằng 0.

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $(\Delta): ax+by=c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)\notin(\Delta)$ (ta thường lấy gốc tọa độ O).

Bước 3. Tính ax_0+by_0 và so sánh ax_0+by_0 với c.

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ (Δ) (kể cả bờ) chứa M_0 là miền nghiệm của $ax+by\le c$.

Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ (Δ) (kể cả bờ) không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax+by\le c$.

+ Đối với hệ bất phương trình:

Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} ax+by\le c \\ a'x+b'y\le c' \end{cases}$

Vẽ các đường thẳng (Δ): $ax+by=c$ và $\left(\Delta'\right): a'x+b'y=c'$.

Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình và tìm giao của chúng ta được tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ 1 Xác định miền nghiệm của bất phương trình sau: $3(x-y)+1>2x+y$.

Lời giải:

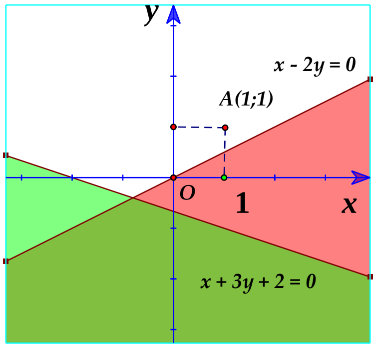
$3(x-y)+1>2x+y \Leftrightarrow x-4y+1>0\,(*)$

Ta thấy khi thay toạ độ điểm O(0;0) vào (*) thì được $1>0$.

Như vậy, miền nghiệm của BPT trên là: nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng $x-4y+1=0$ (không chứa bờ) và chứa gốc toạ độ O(0;0).

Ví dụ 2 Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau (bằng hình vẽ): $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \end{cases}$

Lời giải:



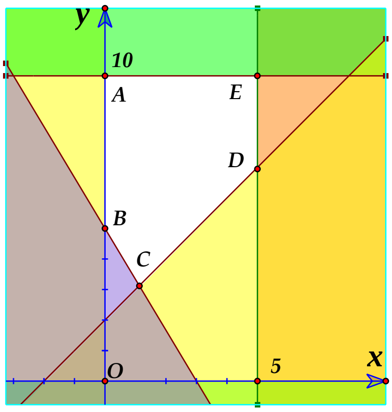
Ví dụ 3 Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 10 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \ge 1 \\ \dfrac{-x}{2} + \dfrac{y}{2} \ge 1 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x - 2y + 3$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình trên biết rằng miền nghiệm đó là miền đa giác và T có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

Lời giải:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 10 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \ge 1 \\ \dfrac{-x}{2} + \dfrac{y}{2} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 10 \\ 5x + 3y \ge 15 \\ -x + y \ge 2 \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ là toàn bộ ngũ giác (kể cả cạnh) $ABCDE$ (phần không tô màu).

$minT = \min(2x - 2y + 3)$

Ta có: $A(0;10) \Rightarrow T = -17;\ B(0;5) \Rightarrow T = -7; C\left(\dfrac{9}{8};\dfrac{25}{8}\right) \Rightarrow T = -1.$

$D(5;7) \Rightarrow T = -1; E(5;10) \Rightarrow T = -7.$

Vậy $minT = -17$ khi $x = 0; y = 10.$

Dạng 4. Ứng dụng vào thực tế

Phương pháp giải:

+ Đọc đề bài, xác định các ẩn;

+ Viết bất phương trình/hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn theo các dữ kiện của đề bài;

+ Vẽ miền nghiệm trên mặt phẳng tọa độ;

+ Dựa vào hình vẽ và tính toán, thực hiện yêu cầu của đề bài.

Chú ý: Giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x;y)=ax+by$ với $(x;y)$ là tọa độ đỉnh của đa giác miền nghiệm.

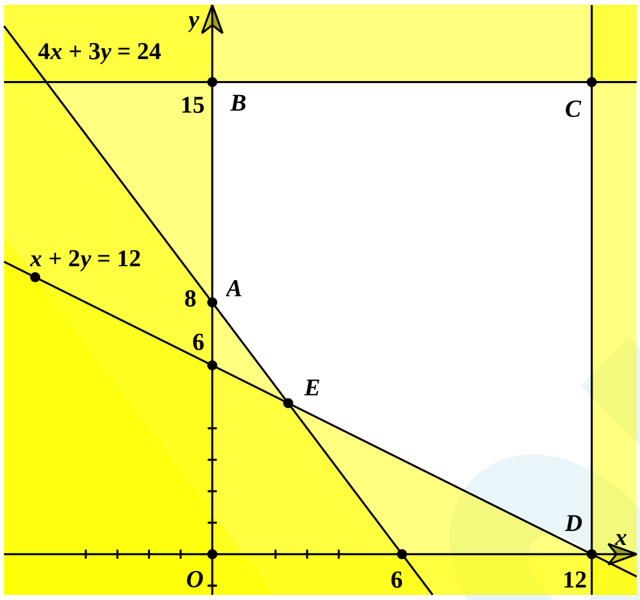
Ví dụ 1 Một công ty trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa là một sản phẩm mới của công ty cần thuê xe để chở ít nhất 120 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 12 chiếc, xe loại B có 15 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4,2 triệu đồng, còn loại B là 3,5 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất? Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,75 tấn hàng; xe B chở tối đa 15 người và 1,5 tấn hàng.

Lời giải:

Gọi x,y lần lượt là số lượng xe loại A,B cần thuê ($x,y\in\mathbb{N}$).

Theo giả thiết ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases}20x+15y\ge 120\\ 0,75x+1,5y\ge 9\\ 0\le x\le 12\\ 0\le y\le 15\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}4x+3y\ge 24\\ x+2y\ge 12\\ 0\le x\le 12\\ 0\le y\le 15\end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền ngũ giác $ABCDE$ (kể cả các cạnh) với $A(0;8)$, $B(0;15)$, $C(12;15)$, $D(12;0)$, $E(2,4;4,8)$.

Chi phí thuê xe là $T=4,2x+3,5y$.

Chi phí thuê xe là thấp nhất khi T đạt giá trị nhỏ nhất.

$T(0;8)=4,2.0+3,5.8=28$;

$T(0;15)=4,2.0+3,5.15=52,5$;

$T(12;15)=4,2.12+3,5.15=102,9$;

$T(12;0)=4,2.12+3,5.0=50,4$.

(Loại điểm E vì $2,4\notin\mathbb{N};2,8\notin\mathbb{N}$)

Vậy cần thuê 8 xe loại B thì chi phí phải trả là nhỏ nhất.

Ví dụ 2 Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 3 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi 2,4 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm I phải dùng máy M_1 trong 4 giờ và máy M_2 trong 2 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm II phải dùng máy M_1 trong 1,5 giờ và máy M_2 trong 3,5 giờ. Biết rằng một máy có thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm; máy M_1 làm việc không quá 7 giờ một ngày và máy M_2 làm việc không quá 6 giờ một ngày. Hãy đặt kế hoạch sản xuất trong ngày của xí nghiệp sao cho tổng số tiền lãi là lớn nhất.

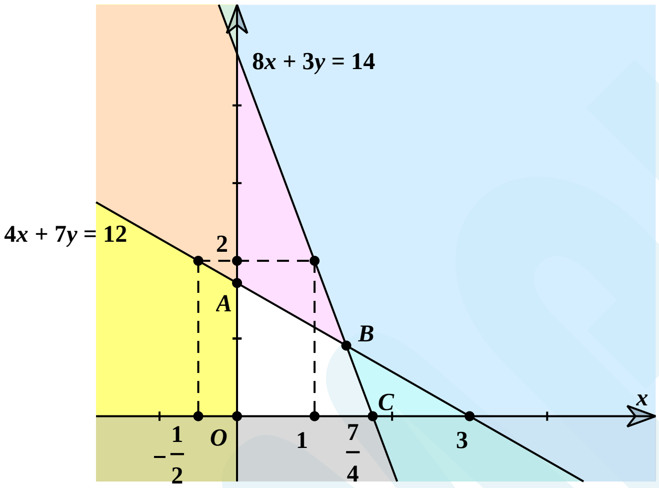
Lời giải:

Giả sử xí nghiệp sản xuất một ngày được x tấn sản phẩm I và y tấn sản phẩm II $(x\ge 0, y\ge 0)$.

Mỗi ngày máy M_1 làm việc $4x+1,5y$ giờ.

Mỗi ngày máy M_2 làm việc $2x+3,5y$ giờ.

Theo giả thiết, ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 4x+1,5y \le 7 \\ 2x+3,5y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 8x+3y \le 14 \\ 4x+7y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.



Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $OABC$ (kể cả các cạnh) với $O(0;0)$, $A\left(0;\frac{12}{7}\right)$, $B\left(\frac{31}{22};\frac{10}{11}\right)$, $C\left(\frac{7}{4};0\right)$.

Số tiền lãi của xí nghiệp trong một ngày là $F=3x+2,4y$.

Biểu thức $F=3x+2,4y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$.

$F(0;0)=3.0+2,4.0=0$;

$F\left(0;\frac{12}{7}\right)=3.0+2,4.\frac{12}{7}=\frac{144}{35}$;

$F\left(\frac{31}{22};\frac{10}{11}\right)=3.\frac{31}{22}+2,4.\frac{10}{11}=\frac{141}{22}$;

$F\left(\frac{7}{4};0\right)=3.\frac{7}{4}+2,4.0=5,25$.

Vậy số tiền lãi lớn nhất là $\frac{141}{22}$ triệu đồng khi xí nghiệp sản xuất $\frac{31}{22}$ tấn sản phẩm I và $\frac{10}{11}$ tấn sản phẩm II.

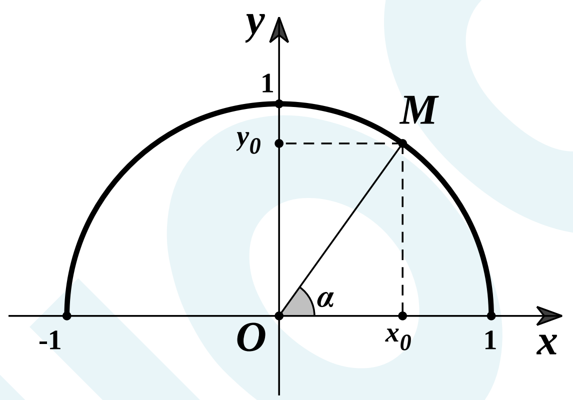
Chương IV: Hệ thức lượng trong tam giác. Vectơ

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0^0 ĐẾN 180^0. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC

1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0^0 đến 180^0

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O bán kính 1 được gọi là nửa đường tròn đơn vị.
  Với mỗi góc α $\left(0°\le\alpha\le 180°\right)$, ta xác định 1 điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $xOM=\alpha$. Khi đó:



$$\sin\alpha = y_0;$$
$$\cos\alpha = x_0;$$
$$\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}\ \left(x_0\ne 0\right);$$
$$\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}\ \left(y_0\ne 0\right).$$

- Chú ý:

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ \left(\alpha\ne 90°\right)$; $\quad$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \left(0<\alpha<180°\right)$;

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\quad$ $\tan\alpha.\cot\alpha=1\ \left(\alpha\notin\left\{0°;90°180°\right\}\right)$.

+) Với $0°\le\alpha\le 90°$:

$$\sin\left(90°-\alpha\right)=\cos\alpha;$$
$$\cos\left(90°-\alpha\right)=\sin\alpha;$$
$$\tan\left(90°-\alpha\right)=\cot\alpha;$$
$$\cot\left(90°-\alpha\right)=\tan\alpha.$$

+) Với $0°\le\alpha\le 180°$:

$$\sin\left(180°-\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha;$$
$$\tan\left(180^\circ-\alpha\right)=-\tan\alpha\quad\left(\alpha\neq 90^\circ\right);$$
$$\cot\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cot\alpha\quad\left(\alpha\notin\left\{0^\circ;180^\circ\right\}\right).$$

2. Định lí côsin

- Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Khi đó:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

- Hệ quả:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

3. Định lí sin

- Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

- Hệ quả:

$$a=2R\sin A;$$
$$b=2R\sin B;$$
$$c=2R\sin C.$$

II. GIẢI TAM GIÁC. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

1. Giải tam giác

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

2. Tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Khi đó:

+) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ với h_a,h_b,h_c là các đường cao ứng với cạnh a,b,c;

+) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C;$

+) $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$ (công thức Heron);

+) $S_{\Delta ABC}=pr$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp;

+) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Chú ý: công thức tính độ dài đường trung tuyến ứng với các cạnh a,b,c:

$$m_a = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4};$$

$$m_b = \frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4};$$

$$m_c = \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}.$$

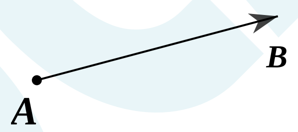
III. KHÁI NIỆM VECTƠ

1. Khái niệm vectơ

- Định nghĩa: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng:

- Một trong hai đầu mút là điểm đầu, đầu mút còn lại là điểm cuối.
- Hướng từ điểm đầu đến điểm cuối là hướng của vectơ.
- Độ dài của đoạn thẳng là độ dài của vectơ.

- Kí hiệu:



- Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu là A, điểm cuối là B, hướng từ A đến B, độ dài là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.
- Vectơ còn được kí hiệu bởi $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},\ldots$. Độ dài của $\vec{a}$ là $\left|\vec{a}\right|$.

- Giá của vectơ: là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó:

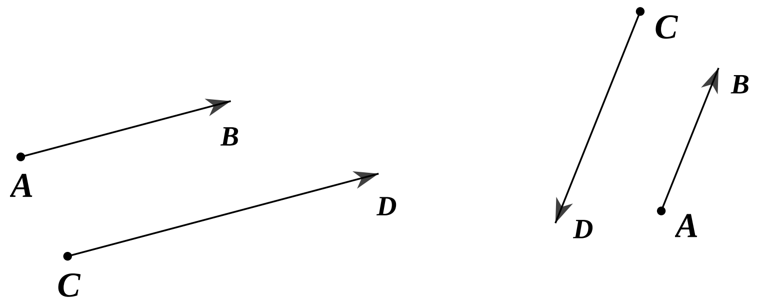
- Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

2. Phương và hướng của hai vectơ

- Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau:

- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương nếu $AB//CD$ hoặc A,B,C,D thẳng hàng.

- Khi hai vectơ cùng phương, nếu chiều từ gốc đến ngọn của hai vectơ đó giống nhau thì hai vectơ đó cùng hướng, ngược lại thì chúng ngược hướng:



cùng hướng *ngược hướng*

- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng nếu $AB//CD$ và hai tia AB, CD cùng hướng.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng nếu $AB//CD$ và hai tia AB, CD ngược hướng.

3. Hai vectơ bằng nhau

- Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài: $\vec{a} = \vec{b}$.

4. Vectơ-không

- Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$ ($\overrightarrow{MM} = \vec{0}, \ \forall M$):

- Độ dài bằng 0.
- Giá của vectơ-không $\overrightarrow{AA}$ là mọi đường thẳng đi qua A.
- Cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.
- Hình biểu diễn là một điểm.

- Hai điểm A, B trùng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

IV. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. Tổng của hai vectơ

- Định nghĩa: Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được xác định như sau:

- Lấy điểm A tùy ý trên mặt phẳng và xác định các điểm B và C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
- Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ là vectơ tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

- Các quy tắc tính tổng các vectơ:

- Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \forall A, B, C$.
- Quy tắc hình bình hành: $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

- Tính chất: với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

2. Hiệu của hai vectơ

- Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài: $\vec{a}=-\vec{b}$.

- Nhận xét:

- Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$;
- $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$;
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

- Định nghĩa: Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vec tơ $\vec{b}$, kí hiệu:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

- Quy tắc hiệu vectơ: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB},\ \ \forall A,B,C$.

Chú ý:

- I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

- G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính toán

Phương pháp giải:

- Vẽ hình hoặc mô hình (nếu là bài toán thực tế).
- Xác định rõ các đại lượng đã biết, từ đó định hướng sử dụng định lí côsin hoặc định lí sin.
- Nếu là tính toán với lượng giác: chú ý các mối liên hệ về giá trị lượng giác của các góc phụ nhau, bù nhau.

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AB=12, BC=8, B=48^\circ$. Độ lớn góc A gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 38°. **B.** 40°. **<u>C</u>.** 42°. **D.** 45°.

Lời giải:

Áp dụng định lí côsin cho ΔABC ta được:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos B = 12^2 + 8^2 - 2.12.8.\cos 48 \approx 79,5$.

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} \approx \frac{12^2 + 79,5 - 8^2}{2.12.\sqrt{79,5}} \approx 0,745 \Rightarrow A \approx 42^\circ.$$

Vậy $A \approx 42^\circ$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 2 Cho góc x thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính giá trị của $\cos x$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

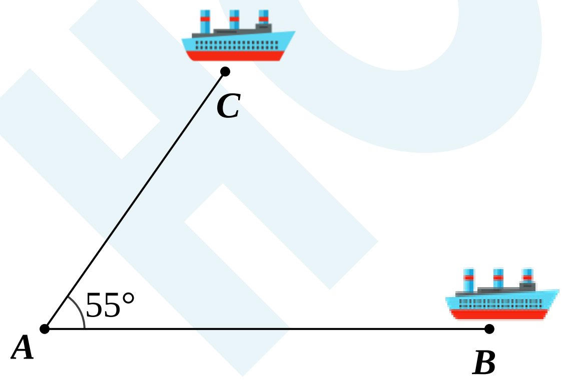
Lời giải:

Do $90^\circ < x < 180^\circ$ nên $\sin x > 0$, $\cos x < 0$.

$$\Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 3 Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 55°. Tàu B chạy với vận tốc 25 hải lí một giờ. Tàu C chạy với vận tốc 20 hải lí một giờ. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



A. Khoảng $48,7$ hải lí.

B. Khoảng $42,5$ hải lí.

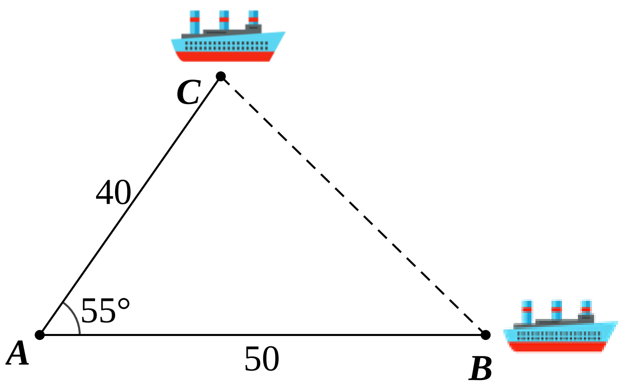
C. Khoảng 36 hải lí.

D. Khoảng 34,1 hải lí.

Hướng dẫn giải

Sau 2 giờ, tàu B đi được: $25.2=50$ (hải lí); tàu C đi được: $20.2=40$ (hải lí).

Vậy ΔABC có $AB=50,\ AC=40,\ A=55°$.



Áp dụng định lí côsin vào ΔABC, ta có:

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A}$

$=\sqrt{50^2+40^2-2.50.40.\cos 55°}$

$\approx 42,5$ (hải lí)

Vậy sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng $42,5$ hải lí.

Chọn đáp án B.

Dạng 2. Chứng minh các đẳng thức

Phương pháp giải:

+ Ta xét hiệu hoặc biến đổi vế này thành vế kia.

+ Chú ý mối liên hệ giữa các góc, hoặc đổi sin – cos.

Ví dụ Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^4 x}=\tan^4 x$;

b) $1-\dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x}-\dfrac{\cos^2 x}{1+\tan x}=\sin x\cos x$;

c) $\sin^8 x+\cos^8 x+2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\sin^4 x\cos^4 x=-1-2\sin^2 x\cos^2 x$.

Phân tích đề:

- Dạng toán: chứng minh đẳng thức lượng giác.
- Dấu hiệu nhận biết: chứng minh đẳng thức có chứa $\sin,\ \cos,\ \tan,\ \cot$.

- Phương pháp giải: sử dụng các tính chất về giá trị lượng giác và các hằng đẳng thức để biến đổi vế này về vế kia (thường là từ vế phức tạp về vế đơn giản hơn) hoặc biến đổi cả hai vế bằng một biểu thức trung gian.

  Chú ý các tính chất sau:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x};\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x};\quad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x};\quad \tan x\cot x=1.$$

Lời giải:

a) $\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^4 x}$

$=\dfrac{\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos^4 x}{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+\sin^4 x}$

$=\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^4 x}{\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^4 x}$

$=\dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x}$

$=\tan^4 x$ (đpcm).

b) $1-\dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x}-\dfrac{\cos^2 x}{1+\tan x}$

$=1-\dfrac{\sin^2 x}{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}}-\dfrac{\cos^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

$=1-\dfrac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}$

$=\dfrac{\sin x+\cos x-\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)}{\sin x+\cos x}$

$=\dfrac{\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)}{\sin x+\cos x}$

$=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x-\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)}{\sin x+\cos x}$

$=\dfrac{\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}$

$=\sin x\cos x$ (đpcm).

c) $\sin^8 x+\cos^8 x+2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\sin^4 x\cos^4 x+2\left(\sin^2 x+\cos x^2\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)$

$-4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2+2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\sin^2 x\cos^2 x-4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-4\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left[\sin^4 x+\cos^4 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2\right]^2-1-2\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left(-2\sin^2 x\cos^2 x\right)^2-1-2\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x\cos^4 x$

$=-1-2\sin^2 x\cos^2 x$ (đpcm).

Dạng 3. Giải tam giác

Phương pháp giải:

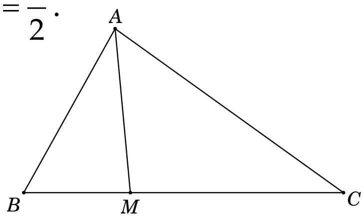
Nắm vững các định lí (sin, cos,…); các công thức liên quan đến độ dài đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác,…

Ví dụ 1 Tam giác ABC có $AB=4, BC=6, AC=2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài cạnh AM.

A. $AM=4\sqrt{2}$. **B.** $AM=3$. **C.** $AM=2\sqrt{3}$. **D.** $AM=3\sqrt{2}$.

Lời giải:

Theo định lí hàm cosin, ta có: $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{4^2+6^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}{2.4.6}=\dfrac{1}{2}$.



Do $MC=2MB\Rightarrow BM=\dfrac{1}{3}BC=2$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AM^2=AB^2+BM^2-2.AB.BM.\cos B=4^2+2^2-2.4.2.\dfrac{1}{2}=12\Rightarrow AM=2\sqrt{3}$

Chọn đáp án C.

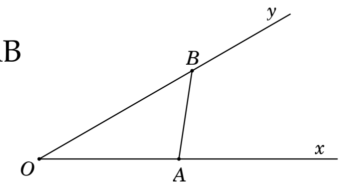
Ví dụ 2 Cho góc $xOy=30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB=1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải:

Theo định lí hàm sin, ta có:

$$\frac{\mathrm{OB}}{\sin\mathrm{OAB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\mathrm{AOB}}\Leftrightarrow\mathrm{OB}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\mathrm{AOB}}\cdot\sin\mathrm{OAB}=\frac{1}{\sin30^{\circ}}\cdot\sin\mathrm{OAB}=2\sin\mathrm{OAB}$$



Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\mathrm{OAB}=1\Leftrightarrow\mathrm{OAB}=90^{\circ}$.

Khi đó $\mathrm{OB}=2$.

Dạng 4. Tính diện tích tam giác

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức tính diện tích tam giác phù hợp dựa theo dữ kiện đề bài cho.

Ví dụ 1 Cho ΔABC có $BC=a=10,\ CA=b=6,\ AB=c=8$. Khi đó, diện tích S của ΔABC bằng bao nhiêu?

A. $S_{\Delta ABC}=12$.

B. $S_{\Delta ABC}=48$.

C. $S_{\Delta ABC}=24$.

D. $S_{\Delta ABC}=40$.

Hướng dẫn giải

+ Cách 1:

Xét ΔABC có

$$\begin{cases}AB^2+AC^2=8^2+6^2=64+36=100\\BC^2=10^2=100\end{cases}$$

$\Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2$

ΔABC là tam giác vuông tại A (định lí Pythagore đảo).

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{1}{2}.8.6=24$.

Vậy diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=24$.

+ Cách 2:

Nửa chu vi của tam giác ABC là:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{8+6+10}{2}=12.$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p.\ (p-a)\ .\ (p-b)\ .\ (p-c)}=\sqrt{12.\ (12-10)\ .\ (12-6)\ .\ (12-8)}=24.$$

Vậy diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=24$.

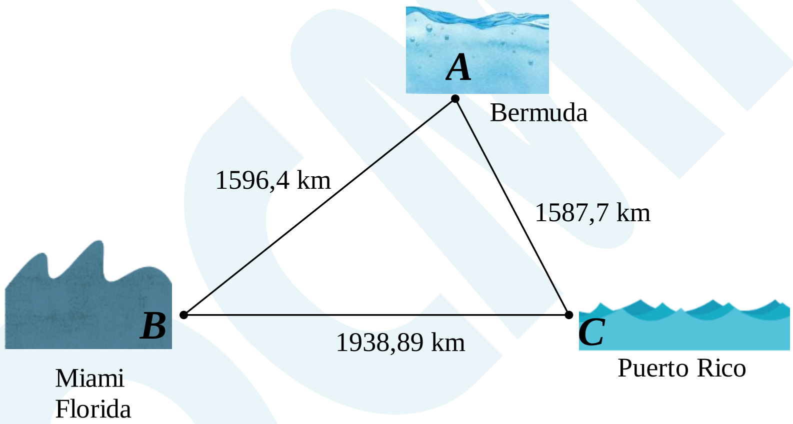
Chọn đáp án C.

Ví dụ 2 Tam giác Bermuda còn được biết đến là Tam giác quỷ - một khu vực không cố định nằm ở hướng tây của phía Bắc Đại Tây Dương và đã nổi tiếng nhờ vào nhiều vụ việc được coi là bí ẩn mà trong đó các tàu thủy, máy bay hay thủy thủ đoàn được cho là biến mất không có dấu tích khi đi vào khu vực này. Nó được xác định bởi phần diện tích tam giác có 3 đỉnh là các địa điểm Florida, Puerto Rico và Bermuda. Biết khoảng cách giữa Florida và Puerto Rico là $1938,89\text{ km}$; khoảng cách giữa Florida và Bermuda là $1596,4\text{ km}$; khoảng cách giữa Bermuda và Puerto Rico là $1587,7\text{ km}$. Diện tích (tính theo ki – lô – mét vuông) của tam giác quỷ này gần với giá trị nào dưới đây nhất?

A. 1223450. **B.** 1225430.

C. 1224250. **D.** 1224350.

Hướng dẫn giải



Nửa chu vi của tam giác ABC là:

$$p=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{1596,4+1938,89+1587,7}{2}=2561,495\ (\text{km}).$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p.(p-BC).(p-AC).(p-AB)}$$

$$=\sqrt{2561,495.(2561,495-1596,4).(2561,495-1587,7).(2561,495-1938,89)}$$

$$=1224254,929\ (\text{km}^2).$$

Chọn đáp án C.

Dạng 5. Vectơ và các đặc trưng

Phương pháp giải:

Nắm vững các kiến thức liên quan đến vectơ (như phương, chiều,…); vectơ bằng nhau, vectơ đối,…

Ví dụ 1 Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải:

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn bài toán là $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại $B,\ C,\ D.$

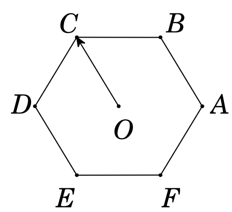
Chọn đáp án D.

Ví dụ 2 Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O.$ Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải:

Đó là các vectơ : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.



Chọn đáp án B.

Ví dụ 3 Cho bốn điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D.$ Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

C. $AC = BD.$ **D.** $AB = CD.$

Lời giải:

Ta có:

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \,//\, CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \,//\, CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án B.

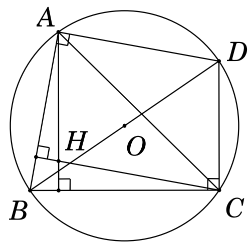
Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CH}$.

D. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$.

Lời giải:



Ta có $AH\perp BC$ và $DC\perp BC$ (do góc DCB chắn nửa đường tròn).
Suy ra $AH\,//\,DC$.
Tương tự ta cũng có $CH\,//\,AD$.
Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

Chọn đáp án B.

Dạng 6. Chứng minh đẳng thức/Tìm kết quả của phép toán vecto

Phương pháp giải:
Áp dụng định nghĩa, tính chất và các quy tắc trong phép toán vecto.

Ví dụ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}$.

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải:

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. Vậy B đúng.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CB}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy C sai.

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\neq\overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Chọn đáp án B.

Dạng 7. Độ dài vecto

Phương pháp giải:

- Biến đổi vectơ tổng, vectơ hiệu thành một vectơ duy nhất.
- Tính độ dài của vectơ đó.
- Từ đó suy ra độ dài của vectơ tổng, vectơ hiệu.

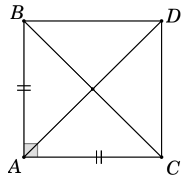
Ví dụ Cho tam giác vuông cân ABC tại A có $AB=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$.

B. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a.$

Lời giải:



Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ABDC$ là hình vuông.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=a\sqrt{2}.$

Chọn đáp án A.

Nguồn : Hocmai