TÀI LIỆU ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ I

Môn toán lớp 11

Chương I: Hàm số LG – Phương trình LG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

1. Đơn vị đo góc và cung tròn

Liên hệ giữ độ và rad

$360° = 2\pi$ (số đo đường tròn bán kính R)

$\Rightarrow 180° = \pi \text{ rad} \Rightarrow 1 \text{ rad } = \dfrac{180°}{\pi} = 57°17'45"$

$1° = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad } = 0,0175 \text{ rad}$

2. Hệ thức lượng giác cơ bản

1. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	5. $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
2. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	6. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1\left(\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	7. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}\right)$
4. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	

3. Hệ thức liên hệ giữa các cung đặc biệt

1. Cung đối nhau (α và $-\alpha$) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	2. Cung bù nhau (α và $\pi-\alpha$) $\sin(\pi-a) = \sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$
3. Cung phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$
5. Cung hơn kém π (α và $\pi+\alpha$) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi+\pi) = \tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	

II. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\qquad$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ $\qquad$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \qquad \cot(a-b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b-\cot a}$$

2. Công thức nhân đôi, nhân ba, hạ bậc

a. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \qquad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \qquad \cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$$

b. Công thức nhân ba

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

c. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} \qquad \cot^2 a=\frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$$

3. Công thức biến tổng thành tích

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$\cos a-\cos a=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \cot a-\cot b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$$

4. Công thức biến tích thành tổng

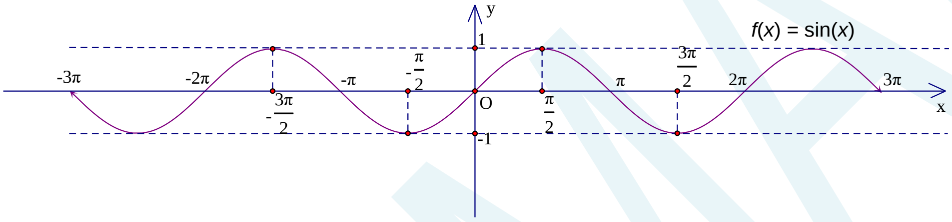
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right] \qquad \sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$

III. Hàm số lượng giác

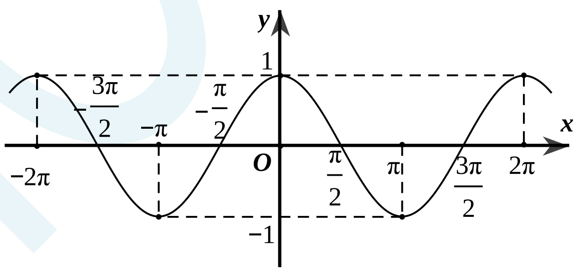
1. Hàm số sin

+ Tập xác định: $\mathbb{R}$.
+ Tập giá trị: $[-1;1]$,có nghĩa là $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
+ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
+ $y=\sin x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng (Hình vẽ dưới đây).



2. Hàm số cosin

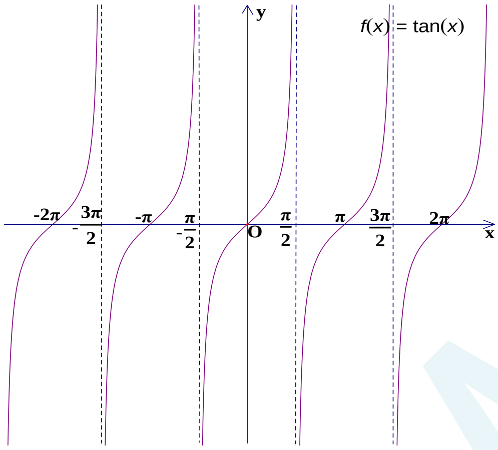
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$.
+ Tập giá trị: $[-1;1]$, có nghĩa là $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
+ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
+ $y=\cos x$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số nhận trục Oy là trục đối xứng (Hình vẽ dưới đây).



3. Hàm số tan

+ Tập xác định: $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$
+ Tập giá trị là R.
+ Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x+k\pi)=\tan x, (k \in \mathbb{Z})$.
+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$.

+ $y = \tan x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận. (Hình vẽ dưới đây)



4. Hàm số cotan

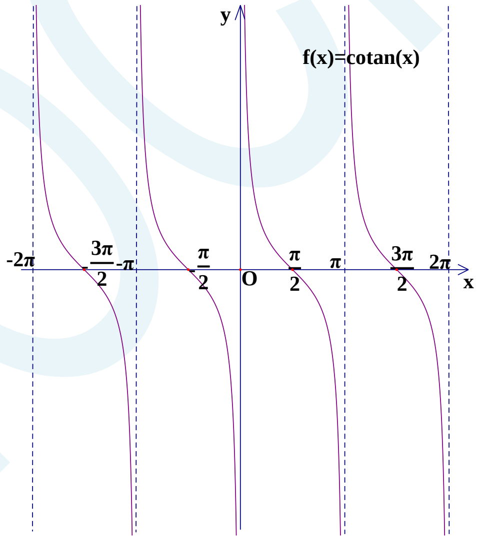
+ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

+ Tập giá trị là $\mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\cot(x + k\pi) = \cot x, (k \in \mathbb{Z})$.

+ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \cot x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận (Hình vẽ dưới đây).



IV. Phương trình lượng giác

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

+ Nếu $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $|a| \le 1$, khi đó xác định α sao cho $a = \sin\alpha$

Phương trình $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2. Phương trình $\cos x = a\ (2)$

+ Nếu $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm do $|\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

+ Nếu $|a| \le 1$, khi đó xác định α sao cho $a = \cos\alpha$

Phương trình $\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

3. Phương trình $\tan x = a\ (3)$

Điều kiện xác định: $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó, xác định α sao cho $a = \tan\alpha$.

Phương trình (3): $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in \mathbb{Z}).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4. Phương trình $\cot x = a\ (4)$

Điều kiện xác định: $x \neq k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó, xác định α sao cho $a = \cot\alpha$.

Phương trình (4): $\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

+ Trường hợp đặc biệt:

$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định dấu và tính toán các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp giải:

- Dựa vào đường tròn lượng giác xác định dấu của cá giá trị lượng giác

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos a$	+	–	–	+
$\sin a$	+	+	–	–
$\tan a$	+	–	+	–
$\cot a$	+	–	+	–

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

- Sau đó, áp dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để tính toán các giá trị lượng giác còn lại.

Ví dụ 1 Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải:

Vì $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (vì $\sin x < 0$).

Khi đó, $\begin{cases} \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\dfrac{1}{2} \\ \cot x = \dfrac{1}{\tan x} = -2 \end{cases}$

Vậy $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \tan x = -\frac{1}{2}; \cot x = -2.$

Ví dụ 2 Biết $\tan \alpha = 2$ và $180° < \alpha < 270°$. Tính giá trị của biểu thức $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Lời giải:

Do $180° < \alpha < 270°$ nên $\cos \alpha < 0$.

Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (vì $\cos \alpha < 0$)

Suy ra, $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Do đó, $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức lượng giác

Phương pháp giải:

Áp dụng các hệ thức lượng giác của cung đặc biệt và các công thức lượng giác (nhân đôi – nhân ba, hạ bậc, công thức cộng, biến đổi tổng thành tích – tích thành tổng)

Ví dụ 1 Rút gọn biểu thức $D=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(13\pi+\alpha)-3\sin(\alpha-5\pi)$.

Lời giải:

$$D=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(13\pi+\alpha)-3\sin(\alpha-5\pi)$$

$$D=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\cdot 6\pi+\pi+\alpha)-3\sin(\pi-\alpha-3\cdot 2\pi)$$

$$D=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)-3\sin(\pi-\alpha)$$

$$D=\cos\alpha-\cos\alpha+3\sin\alpha$$

$$D=3\sin\alpha.$$

Ví dụ 2 Rút gọn biểu thức

a. $P=\dfrac{\cos a+2\cos 3a+\cos 5a}{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}$.

b. $Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos 22^\circ\cos 12^\circ-\cos 10^\circ$.

Lời giải:

a. $P=\dfrac{\cos a+2\cos 3a+\cos 5a}{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}$

$$P=\frac{(\cos a+\cos 5a)+2\cos 3a}{(\sin a+\sin 5a)+2\sin 3a}$$

$$P=\frac{2\cos 3a\cos 2a+2\cos 3a}{2\sin 3a\cos 2a+2\sin 3a}$$

$$P=\frac{2\cos 3a(\cos 2a+1)}{2\sin 3a(\cos 2a+1)}$$

$$P=\frac{\cos 3a}{\sin 3a}$$

$$P=\cot 3a.$$

b. $Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos 22^\circ\cos 12^\circ-\cos 10^\circ$

$$Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos(90^\circ-68^\circ)\cos(90^\circ-78^\circ)-\cos 10^\circ$$

$$Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\sin 68^\circ\sin 78^\circ-\cos 10^\circ$$

$$Q=\cos(68^\circ-78^\circ)-\cos 10^\circ$$

$$Q=\cos(-10^\circ)-\cos 10^\circ$$

$$Q=\cos 10^\circ-\cos 10^\circ$$

$$Q=0.$$

Dạng 3. Tìm điều kiện xác định, chu kì và tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

+ Điều kiện xác định:

- Với hàm số $y=\tan x$ có điều kiện $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$.

- Với hàm số $y=\cot x$ có điều kiện $x\neq k\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$.

- Với hàm số chứa phân thức $y=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ thì mẫu số $g\left(x\right)\neq 0$.

- Với hàm số chứa căn thức $y=\sqrt{f\left(x\right)}$ thì $f\left(x\right)\ge 0$.

+ Chu kì của hàm số lượng giác

- Hàm số $y=\sin x;y=\cos x$ có chu kì là $T=2\pi$.

- Hàm số $y=\tan x;y=\cot x$ có chu kì là $T=\pi$.

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có chu kì là T thì hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(kx\right)$(với $k\neq 0$) có chu kì là $T'=\frac{T}{\left|k\right|}$.

+ Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

- Hàm số chẵn là hàm số thỏa mãn tính chất: $f\left(-x\right)=f\left(x\right),\forall -x;x\in D$.

- Hàm số lẻ là hàm số thỏa mãn tính chất: $f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall -x;x\in D$.

- Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

- Hàm số $y=\sin x;y=\tan x;y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y=\sin \sqrt{x+4}$.

b. $y=\frac{1+\tan x}{\sin x}$.

c. $y=\sqrt{3-2\cos x}$.

d. $y=\cot\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\tan 2x}{\sin x+1}$.

Lời giải:

a. Điều kiện xác định: $x+4\geq 0\Leftrightarrow x\geq -4.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-4;+\infty)$.

b. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq k\pi \end{cases}(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c. Điều kiện xác đinh: $3-2\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq \dfrac{3}{2}$ (luôn đúng vì $|\cos x|\leq 1$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

d. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x+\dfrac{\pi}{6}\neq k\pi \\ 2x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x\neq -1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3} \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x\neq -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 2 Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a. $y=1-\sin 5x.$

b. $y=\cos^2 x-1.$

c. $y=\sin\left(\dfrac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2}{5}x\right).$

d. $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}x\right).$

Lời giải:

a. Hàm số $y=1-\sin 5x$ tuần hoàn và có chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{5}$.

b. Hàm số $y=\cos^2 x-1=\dfrac{\cos 2x-1}{2}$ tuần hoàn và có chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{2}=\pi.$

c. Hàm số $y=\sin\left(\dfrac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2}{5}x\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{4}{5}x\right)$ tuần hoàn và có chu kì $T_3=\dfrac{2\pi}{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{5\pi}{2}.$

d. Hàm số $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}x\right)$ không tuần hoàn

Vì ta có hàm số $y=\cos x$ có chu kì $T_1=2\pi$ và hàm số $y=\cos\left(\sqrt{3}x\right)$ có chu kì $T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của $T_1=2\pi$ và $T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a. $y=\tan x+\cot x.$

b. $y=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right).$

c. $y=\frac{\sin^{2020n}x+2020}{\cos x}, n\in\mathbb{Z}.$

Lời giải:

a. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\tan\left(-x\right)+\cot\left(-x\right)=-\tan x-\cot x=-\left(\tan x+\cot x\right)=-f\left(x\right)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Nhận xét: $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x.$

Ta có $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\cos\left(-2x\right)=\cos 2x=f\left(x\right).$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

+ Nhận xét: $\begin{cases}\sin^{2020n}\left(-x\right)=\left(-\sin x\right)^{2020n}=\sin^{2020n}x, \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\left\{0\right\}\\ \cos\left(-x\right)=\cos x\end{cases}$

Do đó $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\frac{\sin^{2020n}\left(-x\right)+2020}{\cos\left(-x\right)}=\frac{\sin^{2020n}x+2020}{\cos x}=f\left(x\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số là hàm số chẵn với $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\left\{0\right\}.$

+ Với $n=0$ thì $\sin^{2020n}x=1$. Do đó $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\frac{2021}{\cos\left(-x\right)}=\frac{2021}{\cos x}=f\left(x\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số là hàm số chẵn với $n=0.$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn $\forall n\in\mathbb{Z}.$

Dạng 4. GTLN – GTNN của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

Một số chú ý về GTLN – GTNN của hàm số lượng giác

+ $\begin{matrix} -1\le \sin x\le 1 & -1\le \cos x\le 1 & 0\le \sin^2 x\le 1 \\ -1\le -\sin x\le 1 & -1\le -\cos x\le 1 & 0\le \cos^2 x\le 1 \end{matrix}$

+ Hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \\ \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \end{cases}$.

+ Hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn nghịch biến trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$.

Ví dụ 1 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y=4\sin x\cos x+1$ b. $y=4-3\sin^2 2x$

Lời giải:

a. Ta có $y=2\sin 2x+1$.

Do $-1\le \sin 2x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin 2x\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin 2x+1\le 3$

$\Rightarrow -1\le y\le 3$.

* $y=-1\Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

* $y=3\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

b. Ta có: $0\le \sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 4-3\sin^2 x\le 4$

* $y=1\Leftrightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

* $y=4\Leftrightarrow \sin^2 x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ví dụ 2 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$.

Lời giải:

$y=f\left(x\right)=4\sqrt{\sin x+3}$.

Có $-1\le \sin x\le 1$

$\Leftrightarrow 2\le \sin x+3\le 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{\sin x + 3} \le 2$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 1 \le 4\sqrt{\sin x + 3} - 1 \le 7$.

Có $4\sqrt{\sin x + 3} - 1 = 4\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $4\sqrt{\sin x + 3} - 1 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 4\sqrt{2} - 1$, $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 7$.

Dạng 5. Phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1 Giải các phương trình lượng giác sau:

a. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos(2x + 50°) = \frac{1}{2}$.

c. $\tan^2 x = 1$.

d. $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$.

Lời giải:

a. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.,(k \in \mathbb{Z})$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{4\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. $\cos(2x + 50°) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(2x + 50°) = \cos 60°$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 50° = 60° + k360° \\ 2x + 50° = -60° + k360° \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5° + k180° \\ x = -55° + k180° \end{array}\right.,(k \in \mathbb{Z})$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{5°+k180°;-55°+k180°\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c. $\tan^2 x=1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d. Điều kiện xác định: $\left\{\begin{array}{l}4x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x\neq k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\\ x\neq k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Ta có $\tan 4x\cdot\cot 2x=1$

$$\Leftrightarrow \tan 4x=\frac{1}{\cot 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4x=2x+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)\ (loai)$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2 Giải phương trình lượng giác: $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ với $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải:

Ta có $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vì $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}<k<\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow -\frac{7}{6}<k<\frac{2}{3}.$

Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}\\x=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right\}$.

Chương IV: Quan hệ song song trong không gian

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

1. Các tính chất thừa nhận

Có 6 tính chất thừa nhận:

+ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
+ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
+ Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
+ Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
+ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

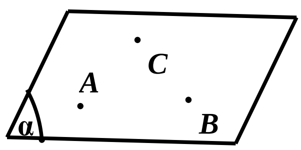
+ Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Cách xác định mặt phẳng

Có 3 cách xác định một mặt phẳng:

+ Mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

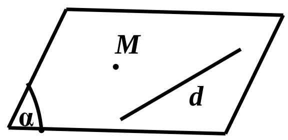
(ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (h1)



(h1)

+ Mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.

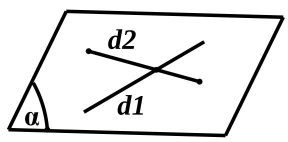
(M, d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)



(h2)

+ Mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.

(d_1, d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h3)



(h3)

II. Hai đường thẳng song song

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có các trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa cả a và b, khi đó theo kết quả tronh hình học phẳng ta có ba khả năng sau:

+ a và b cắt nhau tại điểm M, ta kí hiệu $a \cap b = M$.

+ a và b song song với nhau, ta kí hiệu $a \parallel b$.

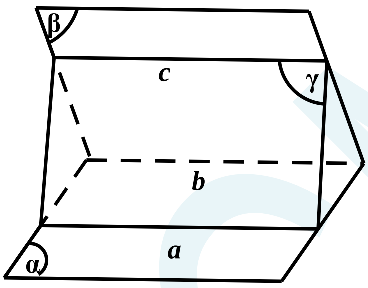
+ a và b trùng nhau, ta kí hiệu $a \equiv b$.

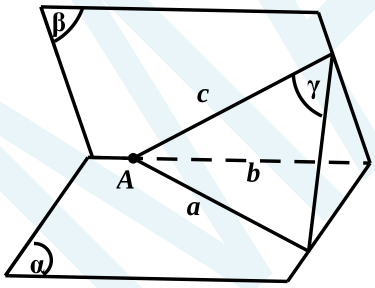
Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b, khi đó ta nói a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

2. Các định lí và tính chất

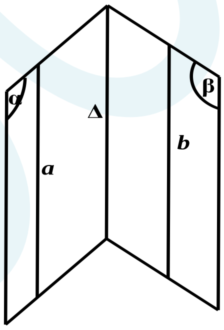
+ Trong không gian, qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng a có một và chỉ một đường thẳng song song với a.

+ Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.





+ Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



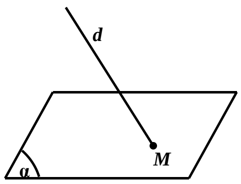
+ Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song.

III. Đường thẳng và mặt phẳng song song

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

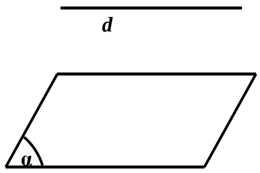
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α), ta có ba vị trí tương đối giữa chúng là:

+ d và (α) cắt nhau tại điểm M, kí hiêu $\{M\} = d \cap (\alpha)$ hoặc để đơn giản ta kí hiệu $M = d \cap (\alpha)$ (h1)



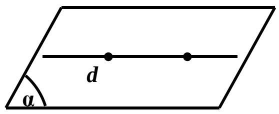
h1

+ d song song với (α), kí hiệu $d \,//\, (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \,//\, d$ (h2)



h2

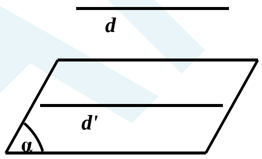
+ d nằm trong (α), kí hiệu $d \subset (\alpha)$ (h3)



h3

2. Các định lí và tính chất

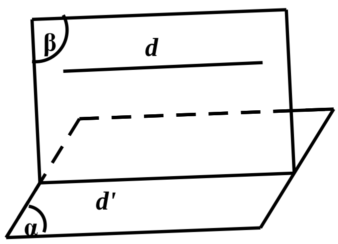
+ Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).



h3

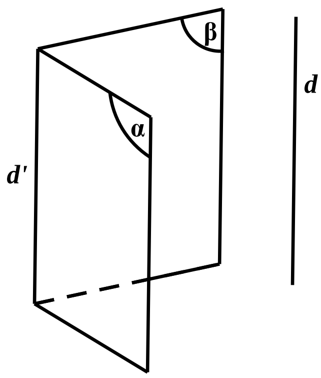
Vậy $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \,//\, d' \quad \Rightarrow d \,//\, (\alpha) \\ d' \subset (\alpha) \end{cases}$

+ Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) đi qua d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' \,//\, d$.



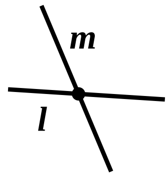
Vậy $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \subset (\beta) \qquad \Rightarrow d' \,//\, d. \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases}$

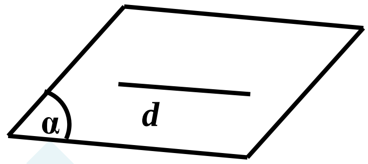
+ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Vậy $\begin{cases} (\alpha) \,//\, d \\ (\beta) \,//\, d \qquad \Rightarrow d' \,//\, d. \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases}$

+ Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

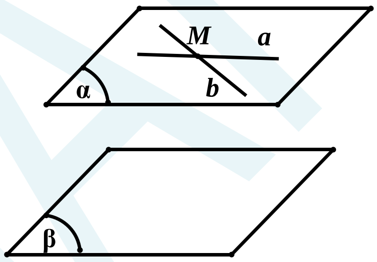




IV. Hai mặt phẳng song song

1. Định lý và tính chất

+ Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha)\,/\!/\,(\beta)$.



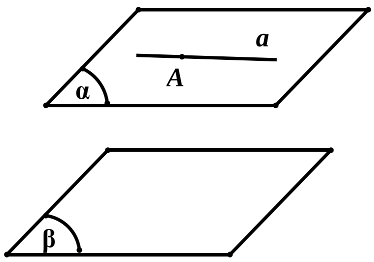
Vậy $\begin{cases} a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b = M \\ a\,/\!/\,(\beta), b\,/\!/\,(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\,/\!/\,(\beta)$.

+ Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1: Nếu $d\,/\!/\,(\alpha)$ thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.

Hệ quả 3: Cho điểm không nằm trên mặt phẳng (α).Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α)đều nằn trong mặt phẳng qua A song song với (α).



Vậy $\begin{cases} A\notin(\alpha), A\in(\beta) \\ A\in d \\ d\,/\!/\,(\alpha) \\ (\beta)\,/\!/\,(\alpha) \end{cases} \Rightarrow d\subset(\beta)$.

+ Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

Vậy $\begin{cases} (\alpha)\,/\!/\,(\beta) \\ (\delta)\cap(\alpha) = a \end{cases} \Rightarrow (\delta)\cap(\beta) = b\,/\!/\,a$.

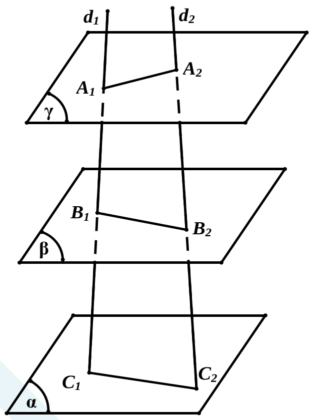
Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.

2. Định lí Ta-lét (Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases} (\alpha)\,/\!/\,(\beta)\,/\!/\,(\chi) \\ d_1\cap(\alpha) = A_1, d_1\cap(\beta) = B_1, d_1\cap(\chi) = C_1 \\ d_2\cap(\alpha) = A_2, d_2\cap(\beta) = B_2, d_2\cap(\chi) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

Định lí Ta-lét (Thales) đảo



Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 sao cho $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

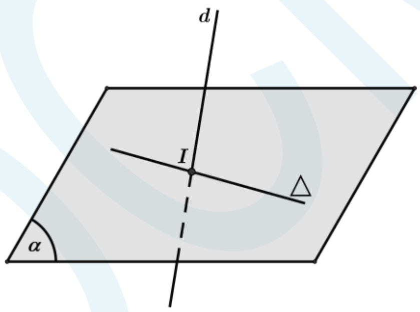
Dạng 1. Tìm giao điểm của đường thẳng – mặt phẳng

Phương pháp giải:

Cơ sở của phương pháp tìm giao điểm I của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là xét hai khả năng xảy ra:

- Trường hợp 1: (α) chứa đường thẳng Δ và Δ cắt đường thẳng d tại I.

Khi đó: $I = d \cap \Delta \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$

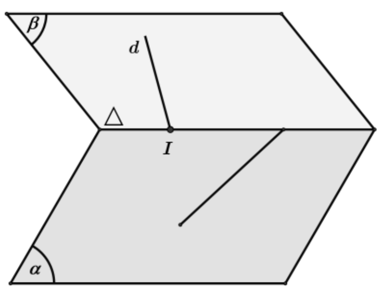


- Trường hợp 2: (α) không chứa đường thẳng nào cắt d.

+ Tìm $(\beta) \supset d$ và $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$;

+ Tìm $I = d \cap \Delta$;

$\Rightarrow I = d \cap (\alpha)$.



Ví dụ 1 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

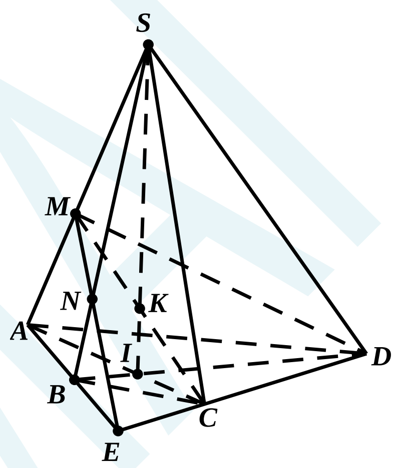
b) Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SBD).

Lời giải:

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong (SAB) gọi $N = SB \cap EM$.

Ta có $N \in EM \subset (MCD) \Rightarrow N \in (MCD)$ và $N \in SB$ nên $N = SB \cap (MCD)$.



b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC \cap SI$.

Ta có $K \in SI \subset (SBD)$ và $K \in MC$ nên $K = MC \cap (SBD)$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

Lời giải:

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$.

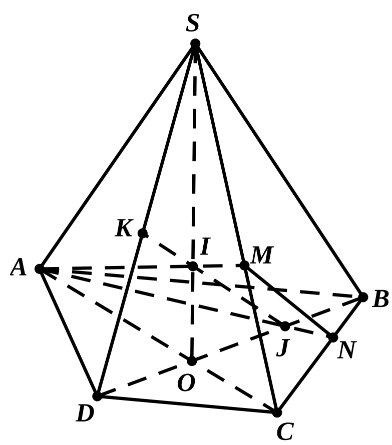
Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM$ và $K = IJ \cap SD$.

Ta có $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN)$

$\Rightarrow IJ \subset (AMN)$.

Do đó $K \in IJ \subset (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$.

Vậy $K = SD \cap (AMN)$



Dạng 2. Chứng minh quan hệ song song: đường thẳng – đường thẳng, đường thẳng – mặt phẳng, mặt phẳng – mặt phẳng

Phương pháp giải:

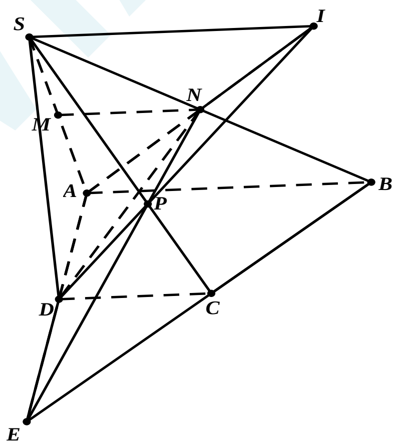
Áp dụng các tính chất và định lý, hệ quả để chứng minh các mối quan hệ song song giữa các đường thẳng và mặt phẳng.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

b) Gọi P là giao điểm của SC và $\left(ADN\right)$, I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.

Lời giải:



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \mathbin{/\!/} AB$.

Lại có $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow AB \mathbin{/\!/} CD$.

Vậy $\begin{cases} MN \mathbin{/\!/} AB \\ CD \mathbin{/\!/} AB \end{cases} \Rightarrow MN \mathbin{/\!/} CD$.

b) Trong $\left(ABCD\right)$ gọi $E = AD \cap BC$, trong $\left(SCD\right)$ gọi $P = SC \cap EN$.

Ta có $E \in AD \subset \left(ADN\right) \Rightarrow EN \subset \left(AND\right) \Rightarrow P \in \left(ADN\right)$.

Vậy $P = SC \cap \left(ADN\right)$.

Do $I = AN \cap DP \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in DP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in \left(SAB\right) \\ I \in \left(SCD\right) \end{cases} \Rightarrow SI = \left(SAB\right) \cap \left(SCD\right)$.

Ta có $\begin{cases} AB \subset \left(SAB\right) \\ CD \subset \left(SCD\right) \\ AB \mathbin{/\!/} CD \\ \left(SAB\right) \cap \left(SCD\right) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \mathbin{/\!/} CD$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, I là trung điểm của AB và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM=\frac{1}{3}AD$.

a) Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG\,//\left(SCD\right)$.

b) Chứng minh $MG\,//\left(SCD\right)$.

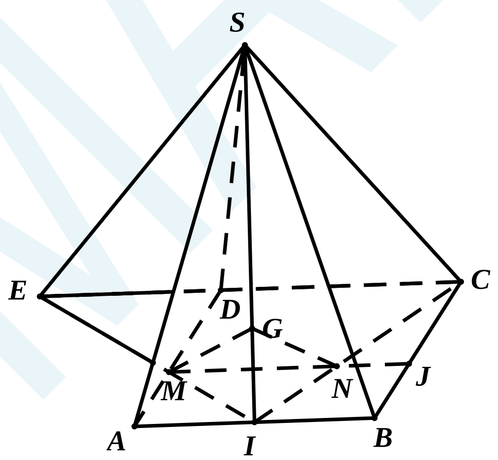
Lời giải:

a) Ta có $\frac{IN}{IC}=\frac{BJ}{BC}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{3},\frac{IG}{IS}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IC}=\frac{IG}{IS}\Rightarrow NG\,//\,SC$,

mà $SC\subset\left(SCD\right)$

$\Rightarrow NG\,//\left(SCD\right)$.



b) Gọi E là giao điểm của IM và CD

Ta có $\frac{IM}{IE}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{IM}{IE}=\frac{IG}{IS}$

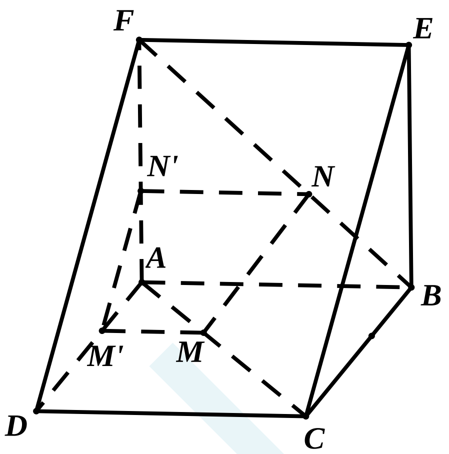
$\Rightarrow MG\,//\,SE$, $SE\subset\left(SCD\right)\Rightarrow GM\,//\left(SCD\right)$.

Ví dụ 3 Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $\left(ADF\right)//\left(BCE\right)$.

b) $\left(DEF\right)//\left(MM'N'N\right)$.

Lời giải:



a) Ta có $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \,//\, (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF \,//\, BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \,//\, (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \,//\, (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).

Ta có $MM' \,//\, CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

$NN' \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \,//\, DF$

$\Rightarrow DF \,//\, (MM'N'N)$.

Lại có $NN' \,//\, AB \Rightarrow NN' \,//\, EF \Rightarrow EF \,//\, (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF \,//\, (MM'N'N) \\ EF \,//\, (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \,//\, (MM'N'N)$.

Dạng 3. Giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải:

Cơ sở của phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) cần thực hiện:

- Bước 1: Tìm hai điểm chung A và B của (α) và (β).

- Bước 2: Đường thẳng AB là giao tuyến cần tìm ($AB = (\alpha) \cap (\beta)$).

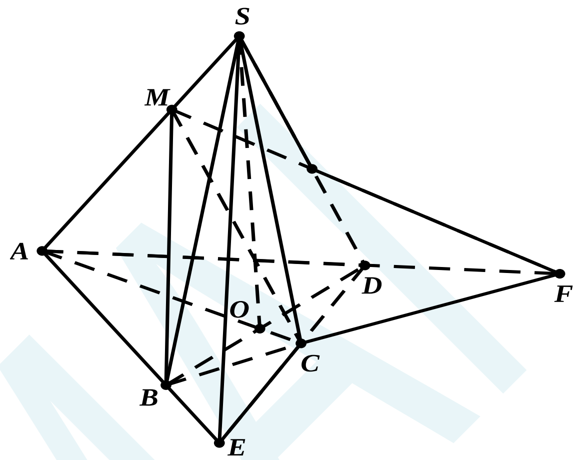
Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải:

a) Gọi $O = AC \cap BD$



$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

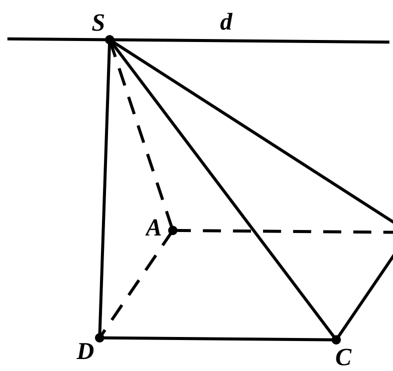
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải:



Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d \,//\, AB \,//\, CD, S \in d$.

Dạng 4. Bài toán tìm thiết diện (thiết diện là hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng với khối đa diện)

Phương pháp giải:

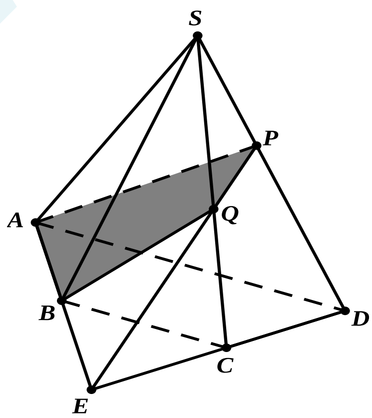
Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của (α) với hình chóp (và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp).

Ví dụ 1 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB).

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

Lời giải:

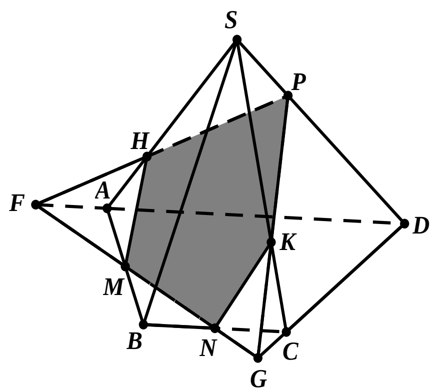


a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên $EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó $Q = SC \cap (ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.



b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F, G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP) \Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

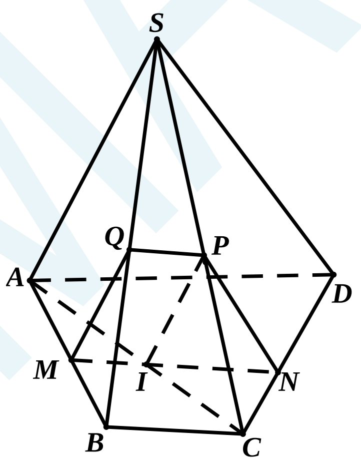
Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là hai điểm thuộc cạnh AB và CD, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là một hình thang.

Lời giải:



a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MQ // SA, Q \in SB$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap MN$

$\begin{cases} I \in MN \subset (\alpha) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SAC)$

Vậy $\begin{cases} I \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = IP // SA, P \in SC$

Từ đó ta có $(\alpha) \cap (SBC) = PQ, (\alpha) \cap (SAD) = NP$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang khi $MN // PQ$ hoặc $MQ // NP$.

Trường hợp 1:

Nếu $MQ // NP$ thì ta có $\begin{cases} MQ // NP \\ MQ // SA \end{cases} \Rightarrow SA // NP$

Mà $NP \subset (SCD) \Rightarrow SA // (SCD)$ (vô lí).

Trường hợp 2:

Nếu $MN \parallel PQ$ thì ta có các mặt phẳng $(ABCD),(\alpha),(SBC)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MN, BC, PQ nên $MN \parallel BC$.

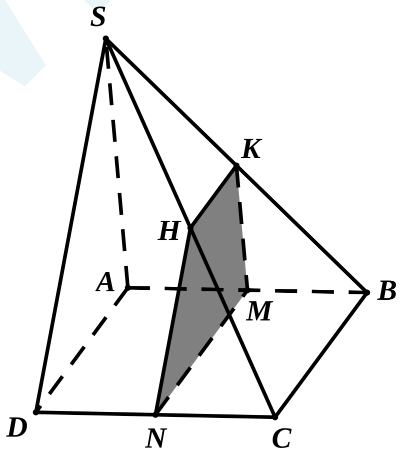
Đảo lại nếu $MN \parallel BC$ thì $\begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ PQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \parallel PQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ là hình thang thì điều kiện là $MN \parallel BC$.

Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

Lời giải:



Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$.

Vậy thiết diện là một hình thang .

Dạng 5. Bài toán có chứa yếu tố tính toán

Phương pháp giải:

Với các bài toán có chứa yếu tố tính toán thường là các bài toán xác định thiết diện, sau đó tính diện tích hoặc chu vi thiết diện (có thể tìm GTLN – GTNN của diện tích, chu vi thiết diện, điều kiện để thiết diện là một đa giác đặc biệt,…). Chính vì thế ta cần xác định đúng thiết diện của hình chóp và mặt phẳng cắt, sau đó áp dụng các phương pháp tính toán để hoàn thành yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Một điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = x\ (0 < x < a)$, (α) mặt phẳng đi qua M song song với SA và SB.

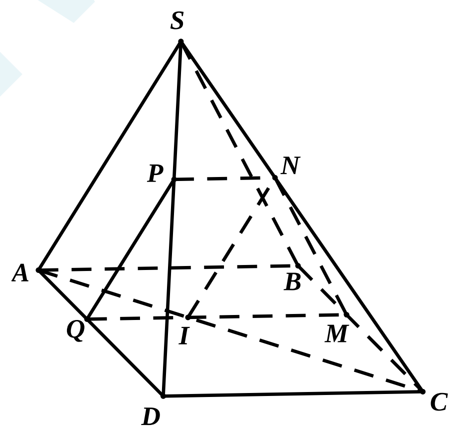
a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) \,//\, SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MN \,//\, SB, N \in SC$



Tương tự $\begin{cases} N \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = NI \,//\, SA, I \in AC$

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MI \cap AD$, thì ta có

$\begin{cases} Q \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = QP \,//\, SA, P \in SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Do $MN \,//\, SB \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CN}{CS}$ (1)

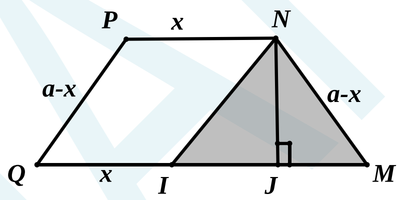
Lại có $IN \,//\, SA \Rightarrow \dfrac{CI}{CA}=\dfrac{CN}{CS}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CI}{CA}\Rightarrow IM \,//\, AB$

Mà $AB \,//\, CD \Rightarrow IM \,//\, CD$.

Ba mặt phẳng $(\alpha),(ABCD)$ và (SCD) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MQ, CD, NP với $MQ \,//\, CD \Rightarrow MQ \,//\, NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang.

Ta có $\dfrac{MN}{SB}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{PQ}{SA}$, mà $SA=SB=a\Rightarrow MN=PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình thang cân.



Từ $\dfrac{MN}{SA}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{a-x}{a}\Rightarrow MN=a-x$,

$\dfrac{PN}{DC}=\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{BM}{BC}\Rightarrow PN=BM=x$,

$\dfrac{IM}{AB}=\dfrac{CM}{CB}\Rightarrow IM=CM=a-x$

Gọi J là trung điểm của IM thì

$$NJ=\sqrt{MN^2-MJ^2}=\sqrt{(a-x)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)$$

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}NJ\,(MQ+NP)=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(a+x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-x^2).$$

Ví dụ 2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh $AB, CC', C'D', AA'$ lấy các điểm M,N,P,Q sao cho $AM=C'N=C'P=AQ=x$, $(0\le x\le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

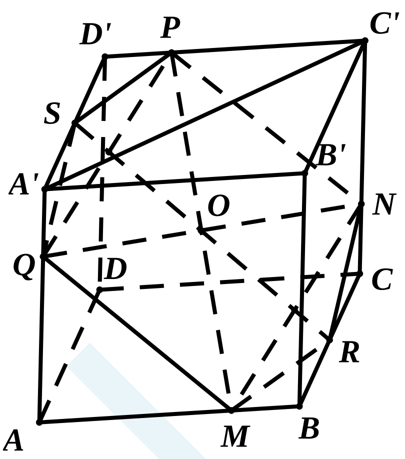
c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Lời giải:

a) Dễ thấy $PN \,//\, CD'$ và $QM \,//\, A'B$ mà $A'B \,//\, C'D$ nên $PN \,//\, QM$ hay M,N,P,Q đồng phẳng.

b) Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.

$\Rightarrow O \in (MNPQ)$.



Mặt khác $A'B \,//\, MQ \subset (MNPQ) \Rightarrow A'B \,//\, (MNPQ)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.

$(MNPQ) \,//\, (A'BC') \Rightarrow BC' \,//\, (MNPQ) \Rightarrow BC' \,//\, NR$

$\Leftrightarrow \dfrac{BR}{BC} = \dfrac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Đảo lại $x = \dfrac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ) \,//\, (A'BC')$.

c) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.

Thiết diện là lục giác $MPNPSQ$. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP, MR = NS, RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là: $2p = 2(RM + MQ + QS)$.

Ta có $MR = QS = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}$, $QM = x\sqrt{2} \Rightarrow 2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0;a]$.

Theo Cauchy-Schwarz

$$\sqrt{\left(a^2 + 4(a-x)^2\right)\left(1^2 + 1^2\right)} \ge a + 2(a-x) \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x)$$

Nên $f(x) \ge x\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x) = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{a}{2}$

Vậy $\min(2p) = 3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \le \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2\left[(a-x)^2 - a^2\right] \le 0$ đúng $\forall x \in [0;a]$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = a$.

Vậy $\max(2p) = 2a\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Nguồn: Hocmai