TÀI LIỆU ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ I

Môn toán lớp 11

Chương I: Hàm số LG – Phương trình LG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

1. Đơn vị đo góc và cung tròn

Liên hệ giữ độ và rad

$360° = 2\pi$ (số đo đường tròn bán kính R)

$\Rightarrow 180° = \pi \text{ rad} \Rightarrow 1 \text{ rad } = \frac{180°}{\pi} = 57°17'45"$

$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad } = 0,0175 \text{ rad}$

2. Hệ thức lượng giác cơ bản

1. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	5. $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
2. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	6. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1\left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2}\right)$
3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	7. $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}\left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}\right)$
4. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	

3. Hệ thức liên hệ giữa các cung đặc biệt

1. Cung đối nhau (α và $-\alpha$) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	2. Cung bù nhau (α và $\pi - \alpha$) $\sin(\pi - a) = \sin\alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$
3. Cung phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$	4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$
5. Cung hơn kém π (α và $\pi + \alpha$) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi + \pi) = \tan\alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$	

II. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \cot(a+b) = \frac{\cot a\cot b - 1}{\cot b + \cot a}$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \qquad \cot(a-b) = \frac{\cot a\cot b - 1}{\cot b - \cot a}$$

2. Công thức nhân đôi, nhân ba, hạ bậc

a. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \qquad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

b. Công thức nhân ba

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

c. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} \qquad \cot^2 a = \frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$$

3. Công thức biến tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$\cos a - \cos a = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$$

4. Công thức biến tích thành tổng

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right] \qquad \sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

III. Hàm số lượng giác

1. Hàm số sin

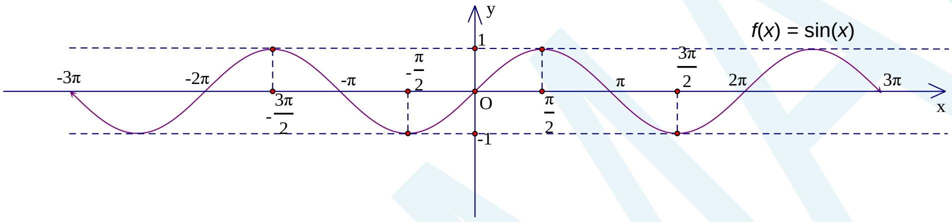
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

+ Tập giá trị: $[-1;1]$,có nghĩa là $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \sin x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng (Hình vẽ dưới đây).



2. Hàm số cosin

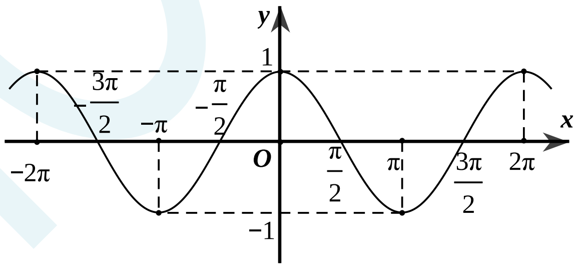
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

+ Tập giá trị: $[-1;1]$, có nghĩa là $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \cos x$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số nhận trục Oy là trục đối xứng (Hình vẽ dưới đây).



3. Hàm số tan

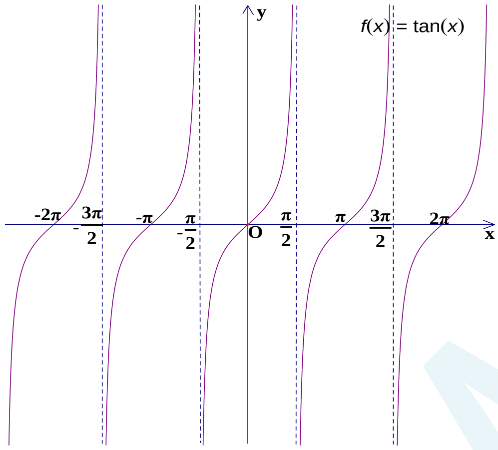
+ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

+ Tập giá trị là R.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x, (k \in \mathbb{Z})$.

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$.

+ $y = \tan x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận. (Hình vẽ dưới đây)



4. Hàm số cotan

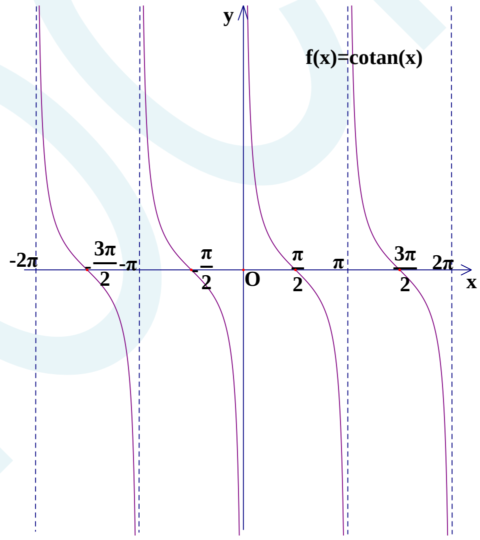
+ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

+ Tập giá trị là $\mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\cot(x + k\pi) = \cot x, (k \in \mathbb{Z})$.

+ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \cot x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận (Hình vẽ dưới đây).



IV. Phương trình lượng giác

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

+ Nếu $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $|a| \le 1$, khi đó xác định α sao cho $a = \sin\alpha$

Phương trình $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2. Phương trình $\cos x = a\ (2)$

+ Nếu $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm do $|\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

+ Nếu $|a| \le 1$, khi đó xác định α sao cho $a = \cos\alpha$

Phương trình $\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

3. Phương trình $\tan x = a\ (3)$

Điều kiện xác định: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$

Khi đó, xác định α sao cho $a = \tan\alpha$.

Phương trình (3): $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a\ (4)$

Điều kiện xác định: $x \neq k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó, xác định α sao cho $a = \cot\alpha$.

Phương trình (4): $\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

+ Trường hợp đặc biệt:

$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

B. MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định dấu và tính toán các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp giải:

- Dựa vào đường tròn lượng giác xác định dấu của cá giá trị lượng giác

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos a$	+	–	–	+
$\sin a$	+	+	–	–
$\tan a$	+	–	+	–
$\cot a$	+	–	+	–

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

- Sau đó, áp dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để tính toán các giá trị lượng giác còn lại.

Ví dụ 1 Cho $\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải:

Vì $-\frac{\pi}{2}<x<0\Rightarrow \sin x<0$

Ta có $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (vì $\sin x<0$).

Khi đó, $\begin{cases} \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\dfrac{1}{2} \\ \cot x=\dfrac{1}{\tan x}=-2 \end{cases}$

Vậy $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{5}};\tan x=-\frac{1}{2};\cot x=-2.$

Ví dụ 2 Biết $\tan\alpha=2$ và $180°<\alpha<270°$. Tính giá trị của biểu thức $\sin\alpha+\cos\alpha$.

Lời giải:

Do $180°<\alpha<270°$ nên $\cos\alpha<0$.

Ta có $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (vì $\cos\alpha<0$)

Suy ra, $\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

Do đó, $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức lượng giác

Phương pháp giải:

Áp dụng các hệ thức lượng giác của cung đặc biệt và các công thức lượng giác (nhân đôi – nhân ba, hạ bậc, công thức cộng, biến đổi tổng thành tích – tích thành tổng)

Ví dụ 1 Rút gọn biểu thức $D=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(13\pi+\alpha)-3\sin(\alpha-5\pi)$.

Lời giải:

$D=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(13\pi+\alpha)-3\sin(\alpha-5\pi)$

$D=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\cdot 6\pi+\pi+\alpha)-3\sin(\pi-\alpha-3\cdot 2\pi)$

$D=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)-3\sin(\pi-\alpha)$

$D=\cos\alpha-\cos\alpha+3\sin\alpha$

$D=3\sin\alpha.$

Ví dụ 2 Rút gọn biểu thức

a. $P=\dfrac{\cos a+2\cos 3a+\cos 5a}{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}$.

b. $Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos 22^\circ\cos 12^\circ-\cos 10^\circ$.

Lời giải:

a. $P=\dfrac{\cos a+2\cos 3a+\cos 5a}{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}$

$P=\dfrac{(\cos a+\cos 5a)+2\cos 3a}{(\sin a+\sin 5a)+2\sin 3a}$

$P=\dfrac{2\cos 3a\cos 2a+2\cos 3a}{2\sin 3a\cos 2a+2\sin 3a}$

$P=\dfrac{2\cos 3a(\cos 2a+1)}{2\sin 3a(\cos 2a+1)}$

$P=\dfrac{\cos 3a}{\sin 3a}$

$P=\cot 3a.$

b. $Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos 22^\circ\cos 12^\circ-\cos 10^\circ$

$Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos(90^\circ-68^\circ)\cos(90^\circ-78^\circ)-\cos 10^\circ$

$Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\sin 68^\circ\sin 78^\circ-\cos 10^\circ$

$Q=\cos(68^\circ-78^\circ)-\cos 10^\circ$

$Q=\cos(-10^\circ)-\cos 10^\circ$

$Q=\cos 10^\circ-\cos 10^\circ$

$Q=0.$

Dạng 3. Tìm điều kiện xác định, chu kì và tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

+ Điều kiện xác định:

- Với hàm số $y=\tan x$ có điều kiện $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$.

- Với hàm số $y=\cot x$ có điều kiện $x\neq k\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$.

- Với hàm số chứa phân thức $y=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ thì mẫu số $g\left(x\right)\neq 0$.

- Với hàm số chứa căn thức $y=\sqrt{f\left(x\right)}$ thì $f\left(x\right)\geq 0$.

+ Chu kì của hàm số lượng giác

- Hàm số $y=\sin x; y=\cos x$ có chu kì là $T=2\pi$.

- Hàm số $y=\tan x; y=\cot x$ có chu kì là $T=\pi$.

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có chu kì là T thì hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(kx\right)$(với $k\neq 0$) có chu kì là $T'=\frac{T}{|k|}$.

+ Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

- Hàm số chẵn là hàm số thỏa mãn tính chất: $f\left(-x\right)=f\left(x\right),\forall -x;x\in D$.

- Hàm số lẻ là hàm số thỏa mãn tính chất: $f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall -x;x\in D$.

- Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

- Hàm số $y=\sin x; y=\tan x; y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y=\sin\sqrt{x+4}$.

b. $y=\frac{1+\tan x}{\sin x}$.

c. $y=\sqrt{3-2\cos x}$.

d. $y=\cot\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\tan 2x}{\sin x+1}$.

Lời giải:

a. Điều kiện xác định: $x+4\ge 0\Leftrightarrow x\ge -4.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-4;+\infty).$

b. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\ne k\pi \end{cases}(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x\ne k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

c. Điều kiện xác đinh: $3-2\cos x\ge 0\Leftrightarrow \cos x\le \dfrac{3}{2}$ (luôn đúng vì $|\cos x|\le 1$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}.$

d. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x+\dfrac{\pi}{6}\ne k\pi \\ 2x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x\ne -1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3} \\ x\ne \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x\ne -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Ví dụ 2 Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a. $y=1-\sin 5x.$

b. $y=\cos^2 x-1.$

c. $y=\sin\left(\dfrac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2}{5}x\right).$

d. $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}x\right).$

Lời giải:

a. Hàm số $y=1-\sin 5x$ tuần hoàn và có chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{5}.$

b. Hàm số $y=\cos^2 x-1=\dfrac{\cos 2x-1}{2}$ tuần hoàn và có chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{2}=\pi.$

c. Hàm số $y=\sin\left(\dfrac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2}{5}x\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{4}{5}x\right)$ tuần hoàn và có chu kì $T_3=\dfrac{2\pi}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5\pi}{2}.$

d. Hàm số $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}x\right)$ không tuần hoàn

Vì ta có hàm số $y=\cos x$ có chu kì $T_1=2\pi$ và hàm số $y=\cos\left(\sqrt{3}x\right)$ có chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của $T_1=2\pi$ và $T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a. $y=\tan x+\cot x.$

b. $y=\sin\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right).$

c. $y=\dfrac{\sin^{2020n}x+2020}{\cos x},n\in\mathbb{Z}.$

Lời giải:

a. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\tan\left(-x\right)+\cot\left(-x\right)=-\tan x-\cot x=-\left(\tan x+\cot x\right)=-f\left(x\right)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Nhận xét: $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x.$

Ta có $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\cos\left(-2x\right)=\cos 2x=f\left(x\right).$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

+ Nhận xét: $\begin{cases}\sin^{2020n}\left(-x\right)=\left(-\sin x\right)^{2020n}=\sin^{2020n}x,\forall n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\\ \cos\left(-x\right)=\cos x\end{cases}$

Do đó $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\dfrac{\sin^{2020n}\left(-x\right)+2020}{\cos\left(-x\right)}=\dfrac{\sin^{2020n}x+2020}{\cos x}=f\left(x\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số là hàm số chẵn với $\forall n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}.$

+ Với $n=0$ thì $\sin^{2020n}x=1$. Do đó $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\dfrac{2021}{\cos\left(-x\right)}=\dfrac{2021}{\cos x}=f\left(x\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số là hàm số chẵn với $n=0.$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn $\forall n\in\mathbb{Z}.$

Dạng 4. GTLN – GTNN của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

Một số chú ý về GTLN – GTNN của hàm số lượng giác

+ $\begin{matrix} -1\le \sin x\le 1 & -1\le \cos x\le 1 & 0\le \sin^2 x\le 1 \\ -1\le -\sin x\le 1 & -1\le -\cos x\le 1 & 0\le \cos^2 x\le 1 \end{matrix}$

+ Hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b) \\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a) \end{cases}$.

+ Hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a) \\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b) \end{cases}$.

Ví dụ 1 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y=4\sin x\cos x+1$ b. $y=4-3\sin^2 2x$

Lời giải:

a. Ta có $y=2\sin 2x+1$.

Do $-1\le \sin 2x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin 2x\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin 2x+1\le 3$

$\Rightarrow -1\le y\le 3$.

* $y=-1\Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

* $y=3\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

b. Ta có: $0\le \sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 4-3\sin^2 x\le 4$

* $y=1\Leftrightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

* $y=4\Leftrightarrow \sin^2 x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ví dụ 2 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$.

Lời giải:

$y=f(x)=4\sqrt{\sin x+3}$.

Có $-1\le \sin x\le 1$

$\Leftrightarrow 2\le \sin x+3\le 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{\sin x + 3} \le 2$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 1 \le 4\sqrt{\sin x + 3} - 1 \le 7$.

Có $4\sqrt{\sin x + 3} - 1 = 4\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $4\sqrt{\sin x + 3} - 1 = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 4\sqrt{2} - 1$, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 7$.

Dạng 5. Phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1 Giải các phương trình lượng giác sau:

a. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos\left(2x + 50^\circ\right) = \dfrac{1}{2}$.

c. $\tan^2 x = 1$.

d. $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$.

Lời giải:

a. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. $\cos\left(2x + 50^\circ\right) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + 50^\circ\right) = \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 50^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x + 50^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^\circ + k180^\circ \\ x = -55^\circ + k180^\circ \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{5^\circ+k180^\circ;-55^\circ+k180^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c. $\tan^2 x=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \tan x=\tan\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d. Điều kiện xác định: $\begin{cases}4x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x\neq k\pi\end{cases},\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}\\ x\neq k\dfrac{\pi}{2}\end{cases},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Ta có $\tan 4x\cdot\cot 2x=1$

$$\Leftrightarrow \tan 4x=\frac{1}{\cot 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4x=2x+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)\ (loai)$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2 Giải phương trình lượng giác: $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ với $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải:

Ta có $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vì $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\pi}{2}}<k<\dfrac{\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\pi}{2}}\Leftrightarrow -\dfrac{7}{6}<k<\dfrac{2}{3}.$

Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}\\x=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

Chương II: Dãy số. Cấp số cộng – Cấp số nhân

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Dãy số

1. Định nghĩa dãy số

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số)

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n).

Số hạng u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

2. Dãy số tăng và dãy số giảm

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có $u_{n+1} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dãy số bị chặn

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_m \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho $m \le u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

II. Cấp số cộng

+ **Cấp số cộng** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số không đổi d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Đặc biệt, khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

+ Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \ge 2$.

+ Tính chất của cấp số cộng với 3 số hạng liên tiếp: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \ge 2$.

+ Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng: $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

III. Cấp số nhân

+ Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nhân với một số không đổi q.

Số không đổi q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Đặc biệt:

Khi $q=1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Khi $q=0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

Khi $u_1=0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

+ Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 \mathrm{q}^{n-1}, \forall n \geq 2.$

+ Tính chất của cấp số nhân với 3 số hạng liên tiếp: $u^2{}_k = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2.$

+ Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân: $S_n = \dfrac{n\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}$.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Số hạng của dãy số

Phương pháp giải:

Thay giá trị của n bằng các giá trị $1,2,3,...$ để tính giá trị của các số hạng thứ n của dãy số đã cho.

Ví dụ 1 Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_n=\sin^2\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{2n\pi}{3}$. Tìm bốn số hạng đầu của dãy số đó.

Lời giải:

Thay $n=1,2,3,4$ vào số hạng tổng quát của dãy số (y_n), ta được:

$$\begin{cases} y_1=\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}=0 \\ y_2=\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2} \\ y_3=\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos 2\pi=\frac{3}{2} \\ y_4=\sin^2\frac{4\pi}{4}+\cos\frac{8\pi}{3}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2 Cho dãy số (a_n) có $a_n=-n^2+4n+11, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

Lời giải:

Ta có $a_n=-(n-2)^2+15\le 15, \forall n\ge 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $n-2=0\Leftrightarrow n=2$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

Dạng 2. Dãy số tăng – giảm, dãy số bị chặn

Phương pháp giải:

Dãy số tăng, giảm

Để chứng minh dãy số (b_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1) Lập hiệu $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n > 0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n < 0$ (dãy số giảm)

(2) Nếu $u_n > 0, \forall n \geq 1$ thì ta có thể lập tỉ số $T_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n > 1$ (dãy số tăng), $T_n < 1$ (dãy số giảm).

Dãy số bị chặn

(1) Nếu (u_n) là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

(2) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.

Ví dụ 1 Xác định sự tăng giảm của các dãy số sau đây : (nếu có)

a. Dãy (a_n), với $a_n = (-1)^{n+1}.\sin\dfrac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Dãy (b_n), với $b_n = (-1)^{2n}.(5^n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c. Dãy (c_n), với $c_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a. Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.

b. Với dãy (b_n), ta có $b_n = 5^n + 1$ (do $(-1)^{2n} = 1$). Vì $b_{n+1} = 5^{n+1} + 1 = 5.5^n + 1 > b_n, \forall n \geq 1$ nên (b_n) là một dãy số tăng.

c. Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n+2}} < \dfrac{1}{n+\sqrt{n+1}} = c_n, \forall n \geq 1$.

d. Dãy số (d_n) là một dãy số giảm vì $d_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+2} < \dfrac{n}{n^2+1} = d_n, \forall n \geq 1$.

Ví dụ 2 Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau: (nếu có)

a. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^2+16}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Dãy (y_n), với $y_n = -(n^2+6n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c. Dãy (w_n), với $w_n = (-2017)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a. Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $a_n = \sqrt{n^2+16} \geq \sqrt{17}, \forall n \geq 1$.

b. Dãy số (y_n) là dãy số giảm và bị chặn trên, y_n nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

c. Dãy số (w_n) là dãy đan dấu (dãy số không tăng, không giảm) và w_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, w_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

d. Dãy số (d_n) là dãy số bị chặn vì $0 < d_n \leq \dfrac{1}{4}, \forall n \geq 1$. $\left(do\ 0 < \dfrac{n}{n^2+4} \leq \dfrac{n}{4n} = \dfrac{1}{4}\right)$.

Dạng 3. Xác định cấp số cộng và các yếu tố của cấp số cộng

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức về số hạng tổng quát và tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng để giải quyết bài toán.

Ví dụ 1 Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải:

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$S_4 = 14 \Leftrightarrow \dfrac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$.

Ví dụ 2 Cho cấp số cộng (x_n) có $x_3 + x_{13} = 80$. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải:

Ta có $x_3 + x_{13} = 80 \Leftrightarrow (x_1 + 2d) + (x_{15} - 2d) = 80$

$\Leftrightarrow x_1 + x_{15} = 80$

$\Rightarrow S_{15} = \dfrac{15(x_1 + x_{15})}{2} = 600.$

Dạng 4. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số cộng

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của cấp số cộng: Nếu a, b, c lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b.$

Ví dụ 1 Cho cấp số cộng $6, x, -2, y$. Tính giá trị của x và y.

Lời giải:

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $\begin{cases} 2x = 6 + (-2) \\ 2.(-2) = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}.$

Ví dụ 2 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Lời giải:

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng.

Theo định lý Vi-et đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$.

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Suy ra $3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m$.

Thay $x_2 = m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3 - 3m.m^2 + 2m(m-4).m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

+ Với $m = 0$ thì ta có phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m = 1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ x = -2;\ x = 4$.

Ba nghiệm $-2;\ 1;\ 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Dạng 5. Xác định cấp số nhân và các yếu tố của cấp số nhân

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức về số hạng tổng quát và tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân để giải quyết bài toán.

Ví dụ 1 Cho cấp số nhân (x_n) có $x_3=18$ và $x_7=1458$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

Lời giải:

Gọi q là công bội của cấp số nhân (x_n).

Ta có $\begin{cases} x_3=18 \\ x_7=1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2=18 \\ x_1.q^6=1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2=18 \\ x_1.q^2q^4=1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ q^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ q=\pm 3 \end{cases}$

+ Với $x_1=2$ và $q=3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n=x_1.q^{n-1}=2.3^{n-1}$.

+ Với $x_1=2$ và $q=-3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n=x_1.q^{n-1}=2.(-3)^{n-1}$.

Ví dụ 2 Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4+u_6=-540 \\ u_3+u_5=180 \end{cases}$. Tính tổng của 21 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n).

Lời giải:

Ta có $u_4+u_6=-540 \Leftrightarrow (u_3+u_5)q=-540.$

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3$.

Lại có $u_3+u_5=180 \Leftrightarrow u_1\left(q^2+q^4\right)=180.$

Vì $q=-3$ nên $u_1=2$.

Suy ra $S_{21}=\dfrac{u_1\left(1-q^{21}\right)}{1-q}=\dfrac{1}{2}\left(3^{21}+1\right).$

Dạng 6. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số nhân

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của cấp số nhân: Nếu a,b,c lập thành một cấp số nhân thì $ac=b^2$.

Ví dụ 1 Cho cấp số nhân $x,12,y,192.$ Tính giá trị của x và y.

Lời giải:

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$y^2=12.192=2304 \Rightarrow y=\pm 48.$

Cũng theo tính chất của cấp số nhân, ta có: $xy=12^2=144.$

Với $y=48$ thì $x=3$; với $y=-48$ thì $x=-3$.

Ví dụ 2 Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125cm^3$ và diện tích toàn phần là $175cm^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải:

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q}, q, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V=\frac{a}{q}.a.qa=a^3=125\Rightarrow a=5$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp}=2\left(\frac{a}{q}.a+a.aq+aq.\frac{a}{q}\right)=2a^2\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=50\left(1+q+\frac{1}{q}\right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=175\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=2\\ q=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Với $q=2$ hoặc $q=\frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm; 5cm; 10cm.$

Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5+5+10=17,5$ cm.

Dạng 7. Bài toán thực tế

Phương pháp giải:

Bước 1: Chuyển bài toán về ngôn ngữ cấp số cộng – cấp số nhân.

Bước 2: Sử dụng các công thức tìm số hạng, tổng,… của cấp số cộng – cấp số nhân để tìm các giá trị theo yêu cầu của bài toán.

Bước 3: Rút ra kết luận

Ví dụ 1 Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n, trong đó $1\le n\le 20$.

Theo giả thiết, ta có $u_1=100000$ và $u_{n+1}=u_n=30000$ với $1\le n\le 19$.

Ta có (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100000$ và công sai $d = 30000$.

Tổng số tiền gia đình thanh toán cho cơ sở khoan giếng chính là tổng các số hạng của cấp số cộng d. Suy ra số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là

$$S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \frac{20[2u_1 + (20-1)d]}{2} = 7700000 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 2 Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$.

Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \geq 1$.

Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q = 1 + r$. Suy ra $M_n = M_0(1+r)^n$.

Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000.$$

Nguồn: Hocmai